

Dinamikai rendszerek
kaotikusságának és stabilitásának vizsgálata
megbízható számítógépes módszerekkel

Doktori értekezés

Bánhelyi Balázs

Témavezető:
Dr. Csendes Tibor
egyetemi docens

Szegedi Tudományegyetem
Alkalmazott Informatika Tanszék
Szeged, 2007

Ezúton szeretném megköszönni elsősorban témavezetőmnek, Csendes Tibornak, hogy bevezetett az intervallummatematika tudományának témakörébe és alapvető technikáiba, továbbá megismertetett társszerzőimmal. Köszönetet mondok társszerzőimnek is, Garay Barnának, Hatvani Lászlónak és Krisztin Tibornak, akik érdekes matematikai problémákkal ismertettek meg, és ötleteket nyújtottak azok megoldásához.

Köszönetet mondok továbbá Arnold Neumaiernek, Jose A. Martineznek és Leocadio G. Casadonak ötleteikért és támogatásukért. Köszönet illeti még Balogh Jánost és Gera Zsoltot a munkám során nyújtott segítségükért.

Végül, de nem utolsó sorban hálával tartozom szüleimnek és páromnak, hogy türelmükkel, megértésükkel és segítségükkel támogattak.

*Tudnod kell, melyik kikötő felé tartasz,
mielőtt be akarnád fogni a jó szelet, mely odarepít.*

Lucius Annaeus Seneca

Előszó

A környezetünket leíró dinamikai rendszerek vizsgálata fontos szerepet tölt be a körülöttünk lévő világ megismerésében. Ezen rendszereket lehetetlen egzakt módon leírni, ezért célravezetőbb először nem túl összetett modelleket vizsgálni. Az egyszerűbb modellek pontos ismerete is hasznos lehet.

*„A szög miatt a patkó elveszett
A patkó miatt a ló elveszett
A ló miatt a lovas elveszett
A lovas miatt a csata elveszett
A csata miatt az ország elveszett
Verd be jól azt a patkószeget!”*

Angol gyermekvers

A fenti idézet első olvasatra azt sugallja, hogy a rendszer pontos leírásában a „szög” is fontos szerepet tölt be. Azonban jelen dolgozat elolvasása után látni fogjuk, hogy egyszerű dinamikai rendszerek is viselkedhetnek érzékenyen a kezdeti állapotra.

A disszertációban különböző rendszerek kaotikusságát és stabilitását fogjuk vizsgálni. E két utóbbi alapvető viselkedés fontos szerepet tölt be minden dinamikai rendszer megismerésében.

Az első fejezetben ismertetünk két – a dolgozatban általánosan használt – technikát. Bemutatjuk az intervallumaritmetikát, mellyel megbízható számítások végezhetők, valamint egy geometriai konstrukciót és annak a kaotikus viselkedéssel vett kapcsolatát. Ez a két módszer alkalmas arra, hogy velük matematikai erejű bizonyítást adjunk kaotikus régiók létezésére.

A második fejezetben bemutatjuk az előző fejezetben ismertetett technikákat az Hénon-leképezésen. Majd ezt a teljesen automatizált eljárást ötvözzük egy optimalizáló eljárással, mely így alkalmas lesz új, eddig ismeretlen kaotikus régiók megkeresésére is. A fejezet további részében bemutatjuk, hogy ez az eljárás alkalmas a topologikus entrópia becslésére, továbbá az Hénon-leképezés összes lehetséges iteráltjára a kaotikus viselkedés bizonyítására.

A harmadik fejezetben egy kényszererős fékezett ingával foglalkozunk, mely egy egyszerűen leírható és megvalósítható mechanikai rendszer. Elsőként egy szükséges, de nem elegendő állítást bizonyítunk a kaotikus viselkedés létezésére. Ezt követően az Hénon-leképezésnél bevált módszert alkalmazzuk erre a dinamikai rendszerre, mellyel sikerül matematikai értelemben is bizonyítani az inga kaotikus viselkedését. A fejezet végén az inga instabil állapotának stabilizálására adunk egy módszert.

A negyedik fejezetben egy több mint 50 éves sejtéssel foglalkozunk. Ez a káosszal ellentétben egy stabilitási kérdéssel foglalkozik. A fejezet első részében bemutatunk egy kézenfekvő módszert, mellyel megpróbáljuk bizonyítani a sejtést. Látni fogjuk, hogy ezen technika alkalmas lehet a bizonyításra, de a számítási igénye nagy. Emiatt ezzel nem tudjuk bizonyítani a teljes sejtést. A fejezet második felében bemutatjuk Wright eredeti bizonyításának lényegét, amely az általa megoldott részfeladatra vonatkozik. Majd ezen ötletet is felhasználva megadunk egy numerikus iterációs korlátozási eljárást, mellyel igazolhatjuk – az elméleti eredmények megfontolása után – a sejtés hiányzó részét.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Megbízható numerikus módszerek	1
1.1.1. Motiváció	1
1.1.2. Az intervallumaritmetika	2
1.1.3. Számítógépes megvalósítás	4
1.1.4. Intervallumos befoglaló függvények	4
1.2. Kaotikus viselkedés és bizonyítása	6
1.2.1. A káosz története	6
1.2.2. A káosz definíciója	7
1.2.3. Egy praktikus feltétel a káosz létezésére	8
 2. Az Hénon-leképezés kaotikus régiói	 14
2.1. Megbízható ellenőrző eljárás a kaotikus viselkedés vizsgálatára	15
2.1.1. Az Hénon-leképezés	15
2.1.2. Numerikus módszer a kaotikusság bizonyítására	17
2.1.3. Intervallumos módszer a kaotikus régió bizonyításához	19
2.1.4. Az Hénon-leképezés 7-dik iteráltjára kapott numerikus eredmények	21
2.1.5. Az Hénon-leképezés ismert kaotikus tartományának érvényessége	22
2.2. Új kaotikus tartományok keresése egy optimalizáló eljárással	24
2.2.1. Optimalizáló eljárás kaotikus régiók keresésére	24
2.2.2. L - R típusú káosz keresése az Hénon-leképezés 5-dik, 3-dik és 6-dik iteráltjára	26
2.2.3. Az eljárás általánosítása	28
2.2.4. Káosz keresése az Hénon-leképezés 4-dik, 2-dik és 6-dik iteráltjára	30
2.2.5. Kaotikus viselkedés egy területtartó Hénon-leképezés esetén	32
2.3. Az Hénon-leképezés topologikus entrópiájának becslése	34
2.3.1. A szimbolikus dinamika és a topologikus entrópia	34
2.3.2. A kaotikus tartomány alapján kapott eredmény az Hénon-leképezés entrópiájára	36

2.3.3.	Lokális javítási lehetőségek	37
2.3.4.	További eredmények	38
2.4.	A kaotikus viselkedés bizonyítása az Hénon-leképezés magasabb ite- ráltjaira	41
2.4.1.	Smale bizonyítása	41
2.4.2.	Számítógéppel segített keresés	44
3.	A kényszererős inga kaotikus viselkedése	47
3.1.	A kaotikusság irányában	48
3.1.1.	A kényszererős fékezett inga	48
3.1.2.	Megbízható módszer a Poincaré-leképezés befoglalására	49
3.1.3.	A periodikus pontok	49
3.1.4.	A káosz létezésének szükséges feltétele	52
3.2.	A káosz matematikai bizonyítása	54
3.2.1.	J. Hubbard tétele a kaotikus viselkedésre	54
3.2.2.	A bizonyítás menete	55
3.2.3.	Káosz bizonyítása a szimbolikus térben	57
3.2.4.	Az inga mozgásának bizonyítása	58
3.2.5.	A bizonyítás futási eredményei és a megfelelő halmazok	58
3.3.	Az instabil megoldás stabilizálása	60
3.3.1.	Az egyszerű inga stabilizálása	60
3.3.2.	A kényszererős fékezett inga stabilizálása	61
4.	A Wright-sejtés vizsgálata	64
4.1.	Egy késleltetett differenciálegyenlet megoldásának követése	65
4.1.1.	A vizsgált késleltetett differenciálegyenlet	65
4.1.2.	A differenciálegyenlet mélyebb vizsgálata	66
4.1.3.	Az intervallumos befoglalás használata	69
4.1.4.	Az ellenőrző eljárás	71
4.1.5.	Eredmények	73
4.2.	A sejtés bizonyítása	78
4.2.1.	Wright módszerén alapuló bizonyítás az $\alpha \leq 1.0$ esetre	78
4.2.2.	Wright módszerén alapuló bizonyítás az $\alpha \leq 1.5$ esetre	81
4.2.3.	A periodikus pályák további számítható korlátai	84
4.2.4.	A megoldás erősebb korlátjai az 1 hosszú szakaszokon	87
4.2.5.	A periodikus pályák hossza	88
4.2.6.	A megoldás erősebb korlátjai a nem 1 hosszú szakaszokon . . .	89
4.2.7.	A periodikus korlátokat számító eljárás	93
4.2.8.	A párhuzamosított ellenőrző eljárás	96
4.2.9.	A sejtés teljes bizonyítása	100

1. fejezet

Bevezetés, avagy a használt technikák

Az utóbbi évtizedekben egyre nagyobb teret hódítanak a számítógépes bizonyítások a matematika területén. Gondoljunk a négyszín-, vagy a Kepler-sejtésre vonatkozó vizsgálatokra [3, 31]. Ezen tételek bizonyításai között előfordulnak numerikus számításokkal elért eredmények is. Ilyen bizonyítások esetében a matematikai erejű igazolás érdekében fontos figyelmet fordítani a számítógépes számítások pontatlanságának kezelésére is.

Jelen fejezet első felében olyan technikát ismertetünk, mely jól alkalmazható matematikai bizonyításokban. Egy új aritmetikát építünk fel, amely képes kezelni a számítógép pontatlanságát. Ezen aritmetika ismertetése után megmutatjuk a legfontosabb tulajdonságait is.

A fejezet második felében egy, a kaotikusságot kimutatni képes eljárást definiálunk. A technika egy Smale-patkó megmutatásán alapul, melynek léte egyszerű halmazelméleti tartalmazási tulajdonságokkal igazolható. Így ez az eljárás – a korábbi számítógépes számításokkal ötvözve – képes matematikai bizonyító erővel kimutatni a kaotikus régiók létezését. A fejezet végén bemutatjuk a dolgozatban használt főbb patkókat és a hozzájuk tartozó halmazelméleti tulajdonságokat.

A fejezetben szereplő technikák ismertetése során közölt tételeket matematikailag nem bizonyítjuk. Az 1.14. Tétel bizonyítását is csak a dolgozat megértéséhez szükséges mélységben mutatjuk be.

1.1. Megbízható numerikus módszerek

1.1.1. Motiváció

A számítógépeken történő számábrázolás elterjedt, hatékony formája a lebegőpontos számábrázolás, amellyel csak bizonyos pontossággal tudunk számolni. Így a számítások során az eredményt szinte sosem tudjuk pontosan ábrázolni a számítógépben. Nézzük az alábbi egyszerű példát:

$$(10^{-6} + 1) \cdot 10^8 - 10^8 - 100.$$

Könnyen látható, hogy ennek a kifejezésnek az értéke 0. Azonban ha egy C/C++ programozási nyelven írt programmal számoljuk ki, amelyben a float pontosságot használjuk, akkor az eredmény -4 lesz. Még double pontossággal is az eredmény $-1.490116119e - 08$ lesz, amely lényegesen eltér a helyes 0 eredménytől. Az első esetben a pontatlanság a 10^{-6} és az 1 értékek közti 6 nagyságrendi különbségből adódik, mely éppen a float típus pontossága. A második esetben a pontatlanságot az okozza, hogy a 10^{-6} érték nem ábrázolható a számítógép 2-es számrendszerében véges hosszan. Így ezen szám helyett egy közelítő értéket használ a gép, amely már ábrázolható véges hosszan. Ezen közelítési hibának a hatását láthatjuk aztán a végeredményben.

A közelítő számításokat matematikai bizonyításokban nem, vagy csak nehézkesen lehet használni. Ehelyett egy olyan módszert használunk, mely egy intervallumot ad vissza eredményül, és ezen eredményintervallum garantáltan tartalmazza a helyes megoldást.

1.1.2. Az intervallumaritmetika

Egy intervallumon két valós számot és azok között lévő valós számok halmazát értjük:

$$X = [\underline{X}, \overline{X}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{X} \leq x \leq \overline{X}\},$$

ahol \underline{X} az intervallum alsó, míg az \overline{X} a felső végpontját jelenti. Egy n dimenziós intervallumon az $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ vektort értjük, ahol X_i ($i = 1, \dots, n$) egy-egy egydimenziós intervallum.

Az intervallumok halmazát \mathbb{I} -vel, míg az n -dimenziós intervallumok halmazát \mathbb{I}^n -nel jelöljük.

Az egydimenziós X intervallum szélességén a

$$\text{wid}(X) = \overline{X} - \underline{X},$$

míg egy n -dimenziós intervallum szélességén a

$$\text{wid}(X) = \max_{i=1, \dots, n} (\overline{X}_i - \underline{X}_i)$$

értéket értjük. Egy n -dimenziós intervallum középpontját a

$$\text{mid}(X) = \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X})$$

kifejezéssel határozhatjuk meg, ahol $\underline{X} = (\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n)$ és $\overline{X} = (\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n)$.

Az intervallumos számítások esetén valós számok helyett intervallumokat használunk, melyekre így definiálni kell a műveleteket is. A valós számokon értelmezett elemi műveletek (Ω) intervallumos kiterjesztését az alábbi alakban adjuk meg:

1.1. Definíció. Az elemi műveletek intervallumos kiterjesztése:

$$A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A \text{ és } b \in B\}, \text{ ahol } A, B \in \mathbb{I}, \circ \in \Omega.$$

A fenti definíció alapján két nem nulla szélességű intervallumon végzett elemi művelet elvégzéséhez végtelen sok valós számon elvégzett számítás szükséges. Könnyen látható, hogy bizonyos műveletek esetében – a monotonitás miatt – a definíció szerinti eredmény véges számú valós művelettel is kiszámítható. Példaként a valós számok halmazán definiáljuk a négy alapműveletet. Ezt a következő konstruktív módon lehet megvalósítani:

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d], \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c], \\ [a, b] \cdot [c, d] &= [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)], \\ [a, b] / [c, d] &= [a, b] \cdot [1/d, 1/c], \text{ ha } 0 \notin [c, d]. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy létezik olyan kiterjesztése a fent definiált intervallumaritmetikának, amelyben az osztás műveleténél megengedett a $0 \in [c, d]$ tartalmazás is. Ezen kiterjesztésnél, ha a $0 \in [c, d]$ tartalmazás teljesül, akkor az osztás eredménye nem lesz kompakt. A nehézkes használata miatt jelen dolgozatban nem foglalkozunk az ilyen esetekkel.

A definiált intervallumaritmetika legfontosabb tulajdonságai:

- Az összeadás és a szorzás asszociatív és kommutatív.
- Az egyetlen zéruselem a $[0, 0]$, az egyetlen egységelem az $[1, 1]$ intervallum.
- Az összeadás és a kivonás, valamint a szorzás és az osztás nem inverzei egymásnak.
- Általában nem teljesül az, hogy a szorzás disztributív az összeadásra nézve, ehelyett az úgynevezett szubdisztributivitási tulajdonság igaz:

$$A \cdot (B + C) \subset A \cdot B + A \cdot C.$$

A valós függvények befoglalása is hasonló módon definiálható.

1.2. Definíció. *Valós függvények intervallumos kiterjesztése:*

$$\phi(X) = \{\phi(x) \mid x \in X\}.$$

Ebben az esetben is kihasználhatók az egyes függvények monotonitási tulajdonságai, melyekkel a kiértékelés egyszerűbbé válik. Például az e -alapú exponenciális függvény esetében a következő módon:

$$e^X = [e^{\underline{X}}, e^{\overline{X}}].$$

További, monotonitási tulajdonsággal nem mindenhol rendelkező, folytonos függvények is egyszerűen számíthatóak, ilyen például a $\sin(x)$ függvény.

1.1.3. Számítógépes megvalósítás

Az intervallumok számítógépes megvalósítása során újabb problémával találjuk szemben magunkat, amikor az eredményintervallum határai nem ábrázolhatók számítógépen. A megbízhatóság miatt kifelé fogjuk kerekíteni a határpontokat, azaz például vesszük a legközelebbi számítógépen ábrázolható számot. A lehetséges kerekítési módokat az IEEE 754 szabvány definiálja pontosan. Ezek megfelelő alkalmazásával az eredmény egy megbízható befoglalását kapjuk, azaz a számítógépen kapott eredményintervallum mindig tartalmazza a pontos eredményt.

Az intervallumos műveleteket támogató szubrutin könyvtárak több programozási nyelven is elérhetőek. Így az általunk használt C és C++ környezetben is [37, 39]. Ezek közül a két legelterjedtebb az általunk is használt C-XSC [22] és PROFIL/BIAS [58] könyvtárak. Ezen könyvtárak a dupla pontosságú számítások esetében a beépített függvényeket használják az intervallumok végpontjainak kiszámítására, majd az eredményt a korábban említett szabvány alapján a megfelelő irányba kerekítik. Mind a két könyvtár támogat nagyobb pontosságú számításokat is [37, 38], mely esetben az alkalmazott rutinok kénytelenek a függvények kiszámítási formuláit használni.

Ekkor egy további probléma léphet fel, ugyanis nem minden függvény értékelhető ki véges számú elemi aritmetikai művelet elvégzésével. Gondoljunk csak a \sqrt{x} -re, a $\sin x$ -re, vagy a már említett e^x -re. Az e^x függvény kiértékelésére – mint egyik lehetőség – az alábbi Taylor-soron alapuló képlet alkalmazható:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} + [-2, 2] \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

ha $0 \leq x \leq 1$.

További részleteket olvashatunk az intervallumaritmetikáról az [1] és az [51] dolgozatokban, és más intervallumos számításokat támogató rendszerek is léteznek, például MATLAB alatt az INTLAB, vagy MAPLE alatt a Range Arithmetic.

1.1.4. Intervallumos befoglaló függvények

Szükségünk lehet összetett függvények kiszámítására is. Ekkor az a kézenfekvő elvárásunk, hogy egy többváltozós, intervallumos függvény eredményintervalluma minden többdimenziós intervallum esetén tartalmazza a valós függvénynek az adott helyen számított értékkészletét.

1.3. Definíció. $F : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ befoglaló függvénye $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ -nek az \mathbf{X} többdimenziós intervallumon, ha minden $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ -re

$$f(\mathbf{Y}) = \{z : z \in \mathbb{R} \mid z = f(\mathbf{y}) \text{ és } \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\} \subseteq F(\mathbf{Y})$$

teljesül.

A korábban említett megbízható alpműveletek sorozatával megadható a függvényérték egy garantált befoglalása. Így – a szakirodalmakban sokszor naiv intervallumaritmetikának is nevezett – természetes intervallum-kiterjesztést kaptunk.

1.4. Definíció. Tekintsük az $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely az x_1, \dots, x_n változókból, az aritmetikai alpműveletekből, és a standard függvényekből felépíthető. Ekkor f természetes intervallum-kiterjesztését az alábbi módon kapjuk:

1. minden x_i változó előfordulását az X_i intervallumra cseréljük, és
2. a valós alpműveleteket és a standard függvényeket pedig a megfelelő intervallumos változataikkal helyettesítjük.

Megemlítjük, hogy az ilyen, megbízható műveletek sorozatával kiértékelt összetett függvények eredményintervalluma sokszor bővebb lesz, mint a valódi értékkészlet, azaz úgynevezett túlbecslést eredményező intervallumot kapunk.

Példaként többféleképpen is számítsuk ki az $f(x) = x \cdot x - 2 \cdot x$ befoglalását az $X = [-1, 5]$ intervallumon.

$$F_1(X) = X \cdot X - 2 \cdot X = [-1, 5] \cdot [-1, 5] - 2 \cdot [-1, 5] = [-5, 25] - [-2, 10] = [-15, 27].$$

$$F_2(X) = X^2 - 2 \cdot X = [-1, 5]^2 - 2 \cdot [-1, 5] = [0, 25] - [-2, 10] = [-10, 27].$$

$$F_3(X) = X \cdot (X - 2) = [-1, 5] \cdot ([-1, 5] - 2) = [-1, 5] \cdot [-3, 3] = [-15, 15].$$

$$F_4(X) = (X - 1)^2 - 1 = ([-1, 5] - 1)^2 - 1 = [-2, 4]^2 - 1 = [0, 16] - 1 = [-1, 15].$$

Ezt a példát elemezve is látható, hogy a matematikai értelemben azonos kifejezések intervallumos kiértékelése különböző eredményeket adhat. Megjegyezendő továbbá, hogy a negyedik esetben a befoglalás pontos, mely abból ered, hogy az x változó pontosan egyszer szerepel a kifejezésben. Ez a tulajdonság már garantálja a pontos befoglalást, ahogy azt a Moore által igazolt tétel is állítja:

1.5. Tétel. (Moore [51]) Amennyiben a tekintett f kifejezésben minden változó pontosan egyszer fordul elő, akkor a természetes intervallum-kiterjesztéssel kapott befoglalás pontos lesz.

Érezhető, hogy nagyobb túlbecsléssel könnyebb befoglaló intervallumokat előállítani, de most vizsgáljuk meg ezen túlbecslésre vonatkozó definíciókat.

1.6. Definíció. Az f függvény egy F befoglaló függvénye izoton tulajdonságú az $X \in \mathbb{I}^n$ -en, ha minden $U, V \subset X$ ($U, V \in \mathbb{I}^n$) esetén $U \subset V$ -ből következik $F(U) \subset F(V)$.

Egyszerűen igazolható, hogy az intervallumos elemi műveletek és a standard matematikai függvények izoton tulajdonságúak, melyből következik a természetes intervallum-kiterjesztés izoton tulajdonsága is.

Nem csak az várható el természetes módon egy befoglaló függvénytől, hogy kisebb intervallumon jobb befoglalást adjon, hanem az is, hogy ha az argumentumintervallum szélessége tart a nullához, akkor a befoglalás szélessége is tartson a nullához. Ezt a tulajdonságot nevezzük zéró-konvergenciának.

1.7. Definíció. Az f függvény egy F befoglalása zéró-konvergens az $X \subset \mathbb{I}^n$ n -dimenziós intervallumon, ha minden olyan $Y_i \in X$ ($Y_i \in \mathbb{I}^n, i = 1, 2, \dots$) intervallum sorozatra, melyre igaz, hogy $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{wid}(Y_i) = 0$, akkor $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{wid}(F(Y_i)) = 0$ is teljesül.

Az aritmetika ezen alapvető és további tulajdonságai megtalálhatók több közleményben is [2, 32, 36, 51, 60, 61].

1.2. Kaotikus viselkedés és bizonyítása

1.2.1. A káosz története

A káoszelmélet gyökerei körülbelül 1900-ra nyúlnak vissza, amikor Henri Poincaré-nak megjelent a háromtest-problémával kapcsolatos dolgozata [57]. Ebben igazolta, hogy három kicsi, egymás gravitációs terében mozgó test leírására szolgáló egyenletrendszer nem integrálható. Poincaré úgy találta, hogy a három test mozgása során lehetnek nem periodikus pályák is.

Később G.D. Birkhoff, A.N. Kolmogorov, M.L. Cartwright, J.E. Littlewood, és S. Smale a nemlineáris differenciálegyenletekre vonatkozó kutatásaik során figyeltek fel újra erre a furcsa viselkedésre. Smale kivételével mindannyiukat a fizika ihlette a nemlineáris differenciálegyenletek ilyen típusú vizsgálatára. Birkhoff esetében a háromtest-probléma, Kolmogorovnál a turbulencia és csillagászati problémák, míg Cartwright és Littlewood számára a rádiózás volt a vizsgálat tárgya. Bár akkoriban kaotikus bolygópályákat még nem észlelt senki, de nem periodikus oszcillációt áramkörökben már megfigyeltek a kísérletezők, anélkül, hogy bármiféle elmélettel meg tudták volna azt magyarázni.

Az elmélet egyik úttörője Edward Lorenz volt, aki munkája során véletlenül „botlott” a káoszba. Lorenz időjárás-előrejelzéssel foglalkozott, és egy egyszerű számítógépet használt a légkört modellező differenciálegyenlet futtatására. Egy adatsort szeretett volna folytatni, de mivel időt akart spórolni, így a korábbi szimuláció közbülső adatát táplálta vissza a számítógépébe.

Nagy meglepetésére az így kiszámított időjárás egyre nagyobb mértékben tért el az eredeti számsortól. Eleinte a gép hibájára gyanakodott, de mint kiderült, nem a számítógépben volt a hiba. Lorenz az adatokat a számítógépen 6 tizedesjegy pontosan ábrázolta, de csak 3 tizedesjegy pontossággal nyomtatta ki. Így csak ilyen, 3 tizedesjegy pontossággal tudta begépelni. Rájött, hogy a bevitelkor elkövetett negyedik számjegyben való eltérés okozta a rendkívül nagy divergenciát. Az akkori elgondolások szerint ilyen kis eltérésnek nem lehetett volna „túl nagy” hatása.

Edward Lorenz felfedezte, hogy a kezdőfeltételekben előforduló, nagyon kis eltérések is okozhatnak idővel nagy eltéréseket [45]. Egy, ezzel a jelenséggel foglalkozó tanulmányának a címe [46, 47] – az azóta híressé vált mondás: – „Does the flap of a butterfly’s wing in Brazil set off a tornado in Texas?”, azaz Brazíliában egy pillangó szárnycsapása okozhat-e tornádót Texasban. A válasz természetesen nem biztos, hogy „igen”, mivel nem minden állapot érhető el természetes esetben. Gondoljunk csak arra, hogy a sivatagban nem várható hóvihár, így ezt egy szárnycsapásnyi eltérés nem okozhatja. A „nem” választ sem mondhatjuk biztosra, ugyanis léteznek ilyen érzékeny rendszerek. Érdekességgént megjegyezzük, hogy a „pillangó effektus”-t először H.G. Wells említi meg az 1800-as évek végén írt egyik tudományos fantasztikus regényében [68].

A káoszelmélet igazi fejlődése a század közepére tehető. Ekkorra egyértelművé vált, hogy az uralkodó rendszerelmélet nem tud megmagyarázni bizonyos viselkedéseket. A káoszelmélet fejlődésének fő elősegítője az elektronikus számítógép felfedezése volt, mivel a káosz matematikájának nagy része egyszerű formulák iterációját jelenti. Ezeknek a kézzel történő tanulmányozása azonban nehézkes. Az olcsóbb

és nagy számítási kapacitással rendelkező számítógépek nagyban felgyorsították a kaoszelmélet fejlődésének ütemét. A kaoszelmélet napjainkban is rendkívül aktív kutatási terület. Magát a kaosz szót a matematikába James A. Yorke alkalmazott matematikus vezette be.

1.2.2. A kaosz definíciója

Egy rendszer kaotikusságához a legismertebb definíció szerint három tulajdonságnak kell teljesülnie a rendszerre [24, 70]. Vegyük sorra ezeket, melyekben \mathcal{J} tetszőleges halmaz lehet.

1.8. Definíció. Az $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ leképezés érzékenyen függ a kezdeti adatoktól, ha $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{J}$ és az x $\forall N_x$ környezetére $\exists y \in N_x$ és $\exists n \geq 0$, hogy $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Az előző definíció azt jelenti, hogy bármely két kezdőállapotból indulva – legyenek bármilyen közel is egymáshoz – idővel pozitív mértékben eltávolodhatnak egymástól a megoldások. Egy időtől független determinisztikus rendszerben azonban azonos kezdőállapotból indított megoldások mindig azonosak maradnak.

1.9. Definíció. Az $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ leképezés topologikusan keverő (topologically mixing), ha $\forall U, V \subset \mathcal{J}$ nyílt halmazra $\exists N > 0$, hogy $\forall n > N$ -re $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

A „topologikusan keverő” tulajdonság azt jelenti, hogy az összes nyitott halmaz egy idő múlva átfedi bármely másik, adott régiót. Azaz egy idő múlva a két régió összekeveredik egymással. Ebből a keveredési tulajdonságból származik a keverő elnevezés.

1.10. Definíció. Az A halmaz sűrű X -ben, ha $\overline{A} \supset X$, ahol \overline{A} az A lezártja, azaz $\overline{A} = A \cup \{A \text{ torlódási pontjai}\}$.

Formálisan ez azt jelenti, hogy ha A sűrű X -ben, akkor minden X -beli pont minden környezete tartalmaz legalább egy pontot A -ból. Például a racionális számok sűrűk a $[0, 1]$ intervallumban.

1.11. Definíció. Az $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ leképezés $x \in \mathcal{J}$ pontját periodikusnak mondjuk, ha $\exists n > 0$, hogy $f^n(x) = x$.

Ez azt jelenti, hogy ha egy pontra egymás után alkalmazzuk a f leképezést, akkor a pontok sorozata periodikusan ismétlődik. A legkisebb olyan pozitív n számot, melyre teljesül a definícióban szereplő feltétel, szokás még x minimális periódusának is nevezni. Az x pontot n -periodikus pontnak, valamint az $n = 1$ esetben fixpontnak is hívják.

Ezen definíciók után nézzük, hogy mikor mondjuk, hogy egy rendszer kaotikus.

1.12. Definíció. Az $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ leképezés kaotikus, ha

1. f érzékenyen függ a kezdeti adatoktól,
2. f topologikusan keverő, és
3. f periodikus pontjainak halmaza sűrű \mathcal{J} -ben.

Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy egy rendszer nem attól kaotikus, hogy nem lehet meghatározni a trajektóriákat, hanem attól, hogy a rendszerben egy kis számítási hiba idővel nagyra is nőhet és lényegesen eltérő viselkedéseket eredményezhet.

Tekintsünk pár példát kaotikus rendszerekre.

- Folytonos idejű rendszerek:

- kettős inga,
- Lorenz-modell,
- dinamikai biliárd,
- mágneses inga,
- csigán lengő test;

- Diszkrét idejű rendszerek:

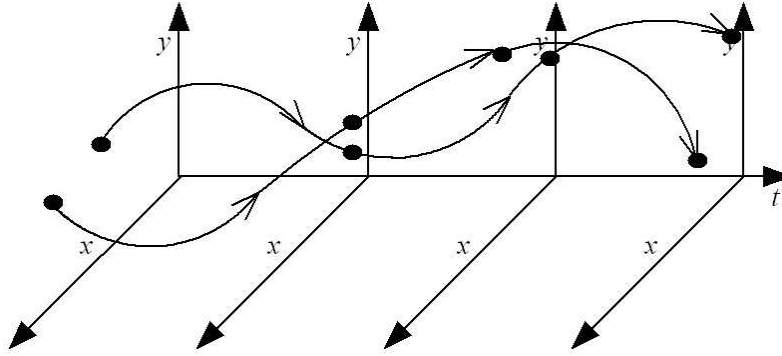
- pék-leképezés,
- Hénon-leképezés,
- Ikeda-leképezés.

1.2.3. Egy praktikus feltétel a káosz létezésére

Egy rendszer kaotikusságát többféle módon is jellemezhetjük:

- az attraktor fraktál dimenziójával,
- a Lyapunov exponenssel,
- a bifurkációs diagrammal, vagy
- a Poincaré-leképezéssel.

A fraktáldimenziót úgy határozhatjuk meg, hogy a fraktált lefedjük különböző méretű négyzetekkel, és megszámloljuk, hogy adott s élhosszúságú négyzetből hány darab szükséges a lefedéséhez. Amennyiben a lefedéshez szükséges négyzetek $N(s)$ száma s^{-D} -vel arányosan nő az élhosszúság csökkenésével, a D számot a fraktál dimenziójának nevezzük, melynek nagysága utal a káosz nagyságára. Míg a Lyapunov-exponens a kezdeti pontatlanság exponenciális növekedésének sebességét számszerűsíti, és ezzel a káosz létezésére adhat bizonyítékot. A bifurkációs diagram esetében a periodikus pontok számának növekedésének alakulását láthatjuk



1.1. ábra. A Poincaré-leképezés illusztrálása.

egy paraméter függvényében, és ez nyújthat bizonyosságot a káoszra. De ezekkel jelen dolgozatban nem foglalkozunk.

A felsoroltak közül mi most csak a Poincaré-leképezést fogjuk alkalmazni a bizonyításhoz. Megmutatható, hogy a Poincaré-leképezések pontosan akkor kaotikusak, ha az eredeti folytonos rendszer is az volt [69]. Emiatt elegendő diszkrét dinamikai rendszerekkel foglalkozni, ha a kaotikus viselkedés általános tulajdonságait, törvényszerűségeit keressük.

1.13. Definíció. Tekintsünk egy n dimenziós determinisztikus dinamikus rendszert, továbbá egy S -el jelölt $(n-1)$ -dimenziós hipersíkot. Az S -ből indított trajektória első metszéspontja az S hipersíkkal a Poincaré-, vagy stroboszkópikus-leképezés.

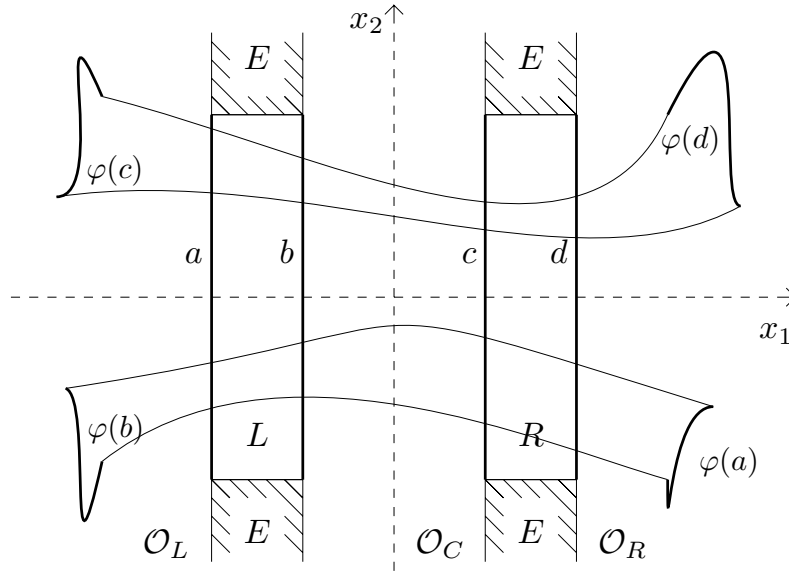
A Poincaré-leképezésre egy lehetséges példa: egy egyszerű, léghellenállás mentes inga sebességét feljegyezzük akkor, amikor a függőleges helyzeten áthalad. Mivel az egyszerű inga nem kaotikus rendszer, ezért mindig ugyanazt a sebességet fogjuk feljegyezni.

Jelen dolgozatban csak kétváltozós rendszerekkel foglalkozunk. Az időt is figyelembe véve már egy háromdimenziós rendszert kapunk. Ebben az esetben az időre vonatkozó hipersík mindig valamely adott időpillanat által meghatározott kétdimenziós síkot fogja jelenteni (lásd az 1.1. ábrát).

Az 1.12. Definícióban szereplő három feltétel csak speciális esetekben bizonyítható egy rendszerre. Nézzünk egy több esetben is alkalmazható feltételt a kaotikus régió létezésére, melyhez a Poincaré-leképezést használjuk.

Kezdetben ezen tételhez hasonló állítások bizonyításához a Brouwer-fokszámot és/vagy a Conley-indexet használták fel [29, 56]. Néhány speciális rendszer kaotikuságának számítógépes bizonyítása [73, 76] már sugallta a Brouwer-féle fixponttétel használatát az 1.14. Tétel bizonyítására. Az első ilyen fixponttételt használó bizonyítást Papini és Zanolin adta egy kétdimenziós esetben [55]. A tétel egzakt bizonyításában a fixponttétel általánosabb változatát a Lagrange-féle középértéktételt, vagy ennek a magasabb dimenziós változatát a Miranda tételt használjuk.

Az 1.14. Tételre és az ahhoz szükséges 1.15. Lemmára itt nem adunk egzakt matematikai bizonyítást, csak rámutatunk a bizonyítás lényeges pontjaira.

1.2. ábra. Az L, R halmaz és képeinek szükséges viszonya.

1.14. Tétel. Legyen $X = \mathbb{R}^2$ a Poincaré-metszet, melyen vegyük az alábbi kétdimenziós tartományokat:

$$E = \{x \in X \mid 1 \leq |x_1| \leq 2, |x_2| \geq 2\},$$

$$\mathcal{O}_L = \{x \in X \mid x_1 < -2\}, \quad \mathcal{O}_C = \{x \in X \mid |x_1| \leq 1\}, \quad \mathcal{O}_R = \{x \in X \mid x_1 > 2\},$$

$$L = \{x \in X \mid -2 \leq x_1 \leq -1, |x_2| \leq 2\}, \quad R = \{x \in X \mid 1 \leq x_1 \leq 2, |x_2| \leq 2\},$$

$$a = L \cap \mathcal{O}_L, \quad b = L \cap \mathcal{O}_C, \quad c = R \cap \mathcal{O}_C, \quad d = R \cap \mathcal{O}_R.$$

Vegyük egy folytonos $\varphi : L \cup R \rightarrow X$ Poincaré-leképezést, amelyre igaz, hogy

$$\varphi(a) \cup \varphi(d) \subset \mathcal{O}_R, \quad \varphi(b) \cup \varphi(c) \subset \mathcal{O}_L,$$

$$\text{és } \varphi(L \cup R) \subset X \setminus E$$

(lásd az 1.2. ábrát). Ekkor φ rendelkezik kaotikus régióval $L \cup R$ -en.

A tétel bizonyításához szükségünk van az 1.15. Lemmára.

1.15. Lemma. Az 1.14. Tételben megadott esetben, adott L – R mindkét irányban végtelen sorozathoz $(\{Q_{\gamma_k}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \text{ ha } \gamma_k \in \{0, 1\}, \text{ és } Q_0 = L, Q_1 = R)$ létezik olyan pontsorozat $(\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset X)$, hogy $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ és $x_k \in Q_{\gamma_k}$ minden $k \in \mathbb{Z}$ -re.

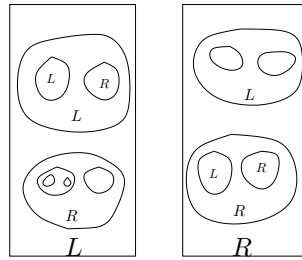
Bizonyítás. (Az 1.15. Lemma bizonyítása.)

$\varphi(L)$ és $\varphi(R)$ átfedi mind L -et, mind R -et. Vegyük a $\varphi^{-1}(\varphi(L) \cap L)$ -et. Ez egy olyan régió L -ben, melynek képe átfedi L -et. Az L a és b oldala lefedi a tekintett régió képének szélét. Mivel az a és b oldalak képei az L és R régiók ellentétes oldalain vannak, így a $(\varphi(L) \cap L)$ kép képe úgyszintén átfedi L -et és R -et is. Tekintsük a $\varphi^{-2}(\varphi(\varphi(L) \cap L) \cap L)$ -et és $\varphi^{-2}(\varphi(\varphi(L) \cap L) \cap R)$ -et. Ez két olyan régió

a $\varphi^{-1}(\varphi(L) \cap L)$ -ben, melyeknek a második képe átfedi L -et és R -et is. Ezt a gondolatmenetet R -re megismételve és folytatva a további iteráltakra, kialakul minden véges sorozathoz egy halmaz, melyből bármely pont iteráltjai az adott sorozatot írják le. Így egy tetszőleges végtelen sorozathoz találhatunk megfelelő pontot.

A mindkét irányban végtelen sorozatokhoz pedig úgy találhatunk megfelelő pontot, hogy vegyük a sorozat korábbi elemeit és ahhoz találjunk megfelelő pontot, majd alkalmazzuk a pontra a leképezést. Folytonos leképezés esetén ezen, egyre korábbi sorozatokhoz tartozó megfelelő pontoknak van torlódási pontja, mely alkalmas lesz a mindkét irányban végtelen sorozathoz. Ezzel az állítást igazoltuk.

Ezen, mindkét irányban végtelen sorozatokhoz tartó ponthalmaz a rendszer egy kaotikus régiója. Az így kialakult halmazt szokás Cantor-szerű halmaznak nevezni (lásd az 1.3. ábrát). ■



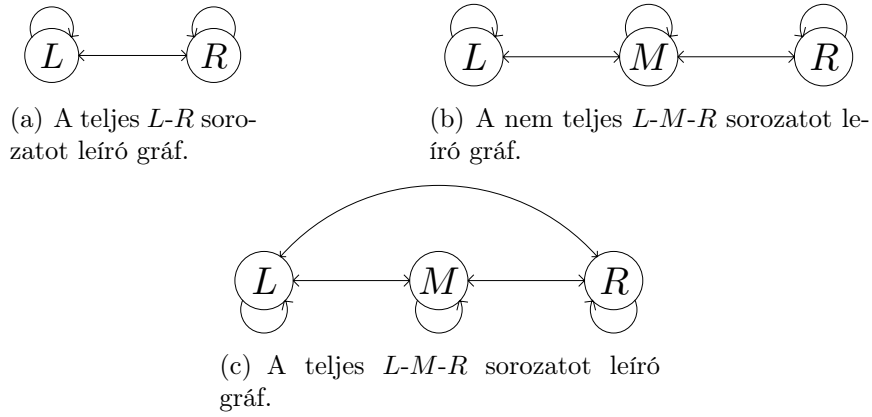
1.3. ábra. Cantor-szerű halmaz.

Bizonyítás. (Az 1.14. Tétel bizonyítása.)

Először vizsgáljuk meg, hogyan láthatjuk be a kezdőfeltételekre való érzékenységet. Legyen δ az L és R tartományok távolsága. Ez a távolság pozitív, mivel L és R diszjunktak és zártak. Vegyünk egy tetszőleges pontot, legyen a hozzá tartozó sorozat S . Ezen pont környezetében a folytonosságból adódik, hogy léteznek olyan pontok, melyekhez tartozó sorozatok eleje megegyezik S elejével, de ezen egyező rész után más szimbólum következik. Legyen az n . szimbólum az első eltérő szimbólum. Ha a leképezést $(n - 1)$ -szer alkalmazzuk a pontokra, akkor az egyik pont képe az L , míg a másiké az R régióba kerül. Így a távolságuk legalább δ , mellyel az első állítást igazoltuk.

A második állítás az, hogy ez a leképezés topologikusan keverő. Vegyünk egy nyílt halmazt, és abban egy pontot. A hozzá tartozó sorozat legyen S . Mivel az eredeti halmaz nyitott, így a pont környezetében találhatunk olyan halmazt az 1.15. Lemma alapján, amelyhez tartozó sorozatok eleje megegyezik S elejével, és az utána levő sorozatok az összes lehetséges sorozatot leírják. Azaz, ha az egyező sorozat hossza n , akkor a leképezést $(n - 1)$ -szer ismételve egy olyan halmazt kapunk, amely az összes pontot tartalmazza a kaotikus régióból, vagyis tetszőleges másik halmazt lefed. Ezzel igazoltuk a második állítást.

A harmadik állításhoz vegyünk egy tetszőleges pontot. Legyen a hozzá tartozó sorozat S . Ha S periodikus, akkor a harmadik feltételben szereplő tartalmazás egyértelmű. Ha S nem periodikus, akkor vegyük csak az S első szimbólumát tartalmazó sorozathoz tartozó periodikus pontot, majd vegyük az első két szimbólumhoz



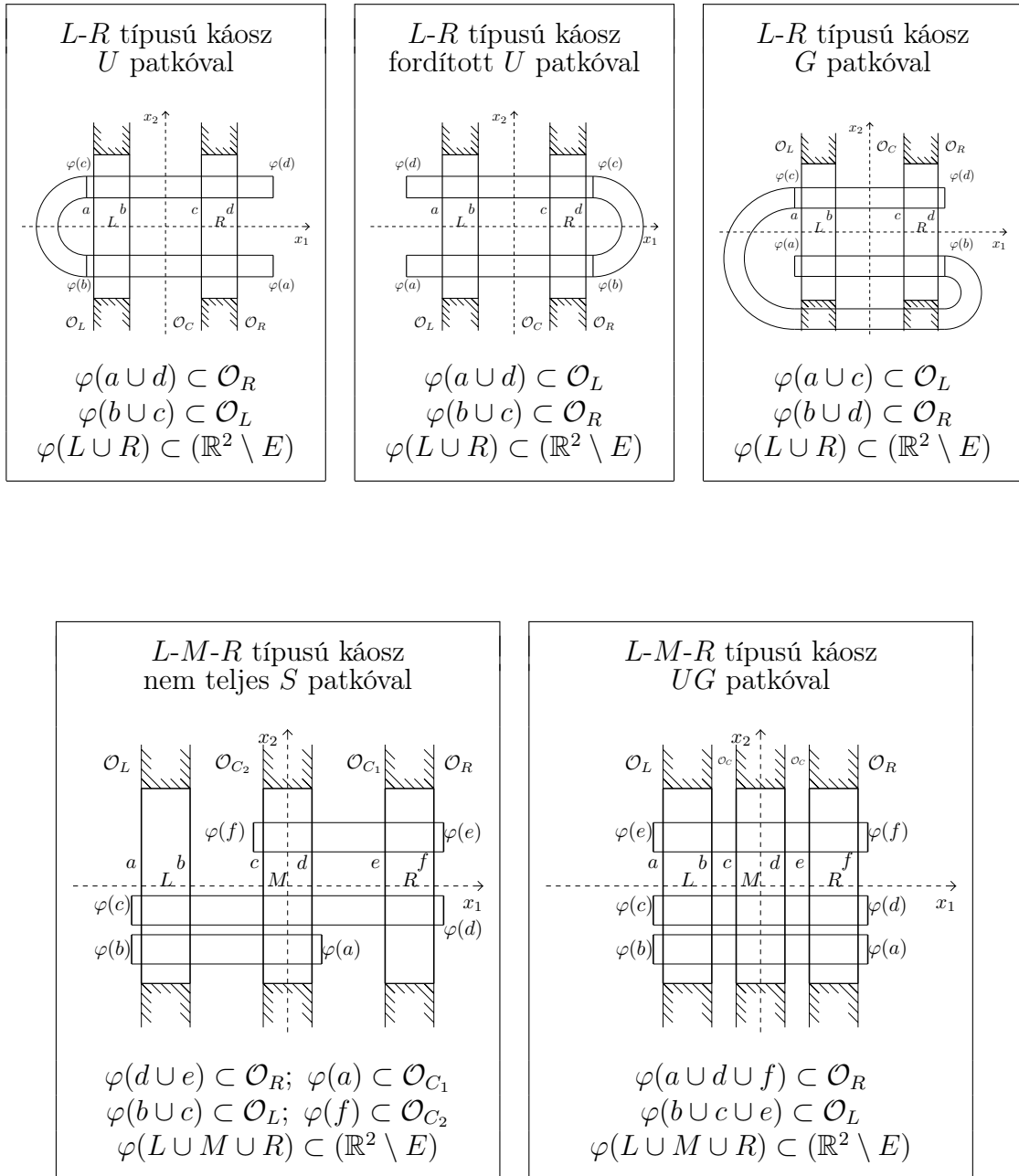
1.4. ábra. A sorozatokat leíró gráfok.

tartozó periodikus pontot, és így tovább. Ebben az esetben ezen periodikus sorozatok torlódási pontja S , így a tartalmazást is beláttuk. Ezzel a harmadik állítást is igazoltuk, mellyel bizonyítottuk, hogy a fent definiált leképezésnek van kaotikus régiója. ■

Ez a fajta kaotikus viselkedés az úgynevezett „ L - R ” típusú káosz. A feltételek egy „ U ” típusú, úgynevezett Smale-patkó létezésének a feltételei. Az 1.1. táblázatban különböző típusú káoszt mutatunk be a hozzájuk tartozó feltételekkel. Megjegyezzük, hogy az L és R közötti régiónak a képe belemetszhet az E halmazba, mely a G patkó illusztrálásánál látható is. Egyébként, ha ez a belemetszés nem történik meg, akkor egy bonyolultabb patkószerkezet is létezhet. Például, a G patkó esetén egy L - M - R típusú káosz teljes S patkóval. Továbbá, a nem teljes S patkónál az a és f oldalaknak nem szükséges az \mathcal{O}_{C_1} és \mathcal{O}_{C_2} régiókba esniük, hanem elegendő az M régiótól jobbra, illetve balra esnie. Ezt a későbbiekben részletesen tárgyaljuk.

Az U és G patkók esetében az összes L - R sorozathoz létezik azt megvalósító pont. A sorozatokat leíró gráfot az 1.4(a) ábrán láthatjuk. Az UG patkóban észrevehetünk egy teljes U , illetve G patkót. E rendszer esetében az összes L - M - R sorozathoz létezik azt megvalósító pont. Az ilyen sorozatokat leíró gráfot az 1.4(c) ábrán láthatjuk. Az S típusú patkó esetén két U típusú patkó összekapcsolódását vehetjük észre. Ebben az esetben nem létezik az összes L - M - R típusú sorozathoz pont. Az olyan sorozatokhoz nem tudjuk bizonyítani a megfelelő pont létezését, amelyben az LR vagy az RL kombináció valamelyike előfordul. Az ilyen sorozatokat leíró gráfot az 1.4(b) ábrán láthatjuk.

Ezen struktúrák túl speciálisak, és ezeket a specialitásokat erősen kihasználják a káosz létezésének bizonyítása során. Egy bonyolultabb struktúra esetén rendszerint egy homeomorf leképezést mutatnak a vizsgált rendszer és ezen struktúrák között.



1.1. táblázat. Az értekezésben szereplő 5 különböző patkó szerkezete. Az egyes patkókhoz tartozó geometriai szerkezetet mutató ábrák felett szerepel a káosz és a patkó típusa, alatta pedig a szükséges halmazelméleti feltételek.

2. fejezet

Az Hénon-leképezés kaotikus régiói és entrópiájának becslése

Amióta Lorenz rámutatott a káosz jelenségére, azóta nagyon sok cikk jelent meg, melyek kaotikus viselkedéseket mutatnak be. Többek között a Lorenz által vizsgált rendszer kaotikusságáról is jelentek meg további publikációk [50, 66].

Ezen kaotikus viselkedések vizsgálata azért fontos, hogy megértsük a dinamikus rendszerek megoldásainak viselkedését. A számítógép sokszor fontos szerepet játszik a káosz létezésének bizonyításában [53, 59]. Dellnitz és Junge munkája [23] jó összefoglalást ad az e területen használt alapvető technikákról.

Ezen a területen az egyik legelterjedtebb az Hénon-leképezés vizsgálata. Ez egy egyszerű kétdimenziós leképezés, mely dinamikájában mégis nagyon hasonlít a Lorenz-féle differenciálegyenletre. Így ezen a területen használt új technikák egyik „tesztje” ennek a leképezésnek a vizsgálata.

Munkánkban a kiindulási pontot Zgliczyński 1997-es cikke [75] adta, melyben bizonyítja, hogy az Hénon-leképezés 7-dik iteráltja rendelkezik kaotikus régióval. E cikk matematikai eredményeit felhasználva megkonstruáltunk egy új, intervallumaritmetikán alapuló számítógépes bizonyítást. A módszer hatékonyságát látva, az ellenőrző eljárásunkat ötvöztük egy optimalizáló eljárással. Így egy teljesen automatizált – a káosz keresésére alkalmas – eljárást nyertünk, melynek részleteit és eredményeit olvashatjuk ezen fejezet első felében, melyeket publikáltunk nemzetközi folyóiratokban [9, 20] és konferenciaanyagokban [7, 8, 18].

A fejezet második felében bemutatjuk ezen új technikák további felhasználhatóságát. Az itt leírt eredmények matematikai háttéréről részletesebben olvashatunk a társszerzőimmel, Csendes Tiborral és Garay Barnával írt cikkekben [10, 11].

Jelen fejezet témájával Garay Barna ismertetett meg. A kaotikusság bizonyítására használt új intervallumos eljárás, és a kereséshez használt optimalizálandó függvény megkonstruálásában témavezetőm, Csendes Tibor segített. Az eljárás és a kapcsolódó tételek, állítások a 2.1.3-as és a 2.2.1-es fejezetekben találhatók. Az ezzel kapcsolatban kimondott tételek és azok bizonyításai Csendes Tibor eredményei, ezért a bizonyításokat a dolgozatban nem közöljük. A 2.1.5-ös fejezetben ismertetett tolerancia optimalizáló eljárás megkonstruálása Csendes Tibor eredménye. Az eljárások megvalósítását saját munkámnak tekinthetem (2.1.4-es és 2.1.5-ös fejezetek).

Az Hénon-leképezés vizsgálatának iránya a Garay Barnával folytatott konzultációk során alakult ki. Az itt elért eredményeket a 2.2.2-es és a 2.2.4-es fejezetek tartalmazzák. A 2.2.3-as fejezetben leírt általánosítást, valamint a 2.2.5-ös fejezetben tárgyalt feladat megoldását saját eredményemnek tekintem.

Az eddig elért eredmények után felmerült bennünk, hogy érdemes lenne hasonló technikával megvizsgálni a topologikus entrópia problémáját is. Az érdemi információkat tartalmazó cikkek feldolgozása után elkészítettem a témához kapcsolódó numerikus eredményeket, melyek korrekt matematikai megfogalmazásában Garay Barna nélkülözhetetlen segítséget nyújtott. Ezek az állítások megtalálhatók a 2.3.1-es fejezetben. A topologikus entrópia terén elért eredmények – néhány kisebb elméleti állítás kivételével – a saját munkámnak tekinthetők (2.3.2 – 2.3.4-es fejezetek). Ezen sikerek után kezdtünk el foglalkozni a Smale-féle bizonyításhoz kapcsolódó témával. Ennek sikeressége azon múlt, hogy mind Garay Barna, mind én tudatában voltunk saját területünk lehetőségeivel és képességeivel, mivel itt sokkal szorosabb a kapcsolat az elméleti (2.4.1-es fejezet) és a számítógépes részek között. Így ezen rész eredményei oszthatatlannak mondhatók. A számítógépes rész (2.4.2-es fejezet) sikerességben kulcsfontosságú ötletnek tartom a két bonyolult régió átfedésének vizsgálatára szolgáló – általam kidolgozott – technikát, melyet a 2.4.1-es fejezet második fele tartalmaz.

2.1. Megbízható ellenőrző eljárás a kaotikus viselkedés vizsgálatára

2.1.1. Az Hénon-leképezés

A Poincaré-metszettel kapott leképezés sokszor bonyolult. Ezért sok esetben egy úgynevezett „árnyék” leképezést használnak. Ezek a leképezések az eredeti leképezés hatását közelítik, viszont ezek már egyszerűbb, síkról síkra való leképezések. Az Hénon-leképezés esetében ez a konvekció egyenletét modellező háromdimenziós nemlineáris Lorenz-egyenlet Poincaré-metszetének egyszerűsített változata [33].

2.1. Definíció. Az Hénon-leképezés:

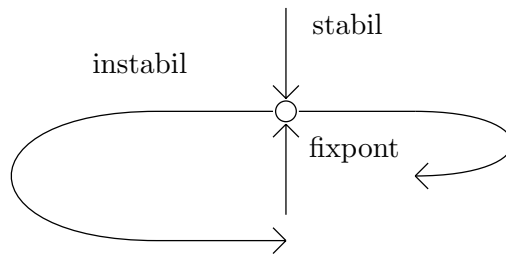
$$\mathcal{H}(x_1, x_2) = (1 - Ax_1^2 + x_2, Bx_1).$$

A klasszikus Hénon-paraméterek: $A = 1.4$ és $B = 0.3$.

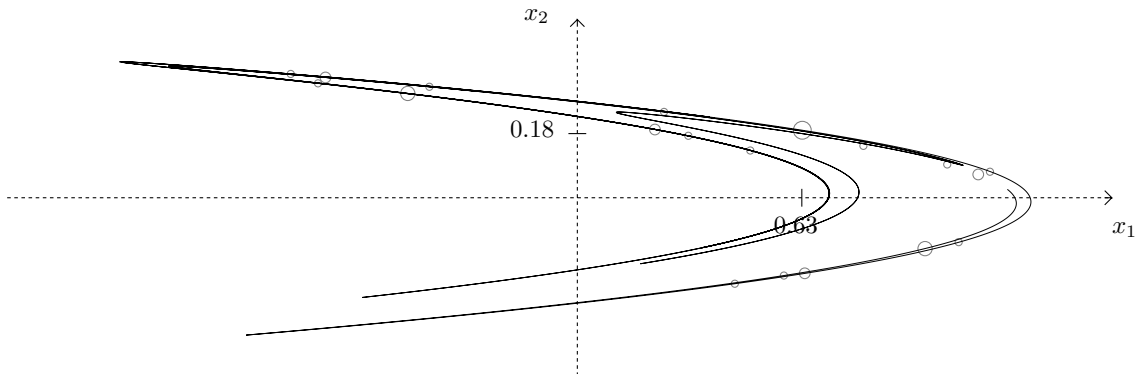
Az Hénon-leképezés magasabb iteráltjainak vizsgálata azt jelenti, hogy a Poincaré-metszettel kapott képeknek nem a közvetlen egymás utáni képeit tekintjük, hanem ezeknek egy adott periódusát.

Az Hénon-rendszer kaotikus viselkedését az alábbi háromféle dinamika okozza: az egyik egy „lapítás”, a másik a „nyújtás”, míg a harmadik ezen lapított-nyújtott régió „visszahajtása”. Ezt a dinamikát láthatjuk a 2.1. ábrán.

A disszipatív rendszerekre jellemző, hogy a mozgás, időbeli változás során a rendszer teljes energiáját folyamatosan csökkenti valamilyen, veszteségekkel járó folyamat, mint például a súrlódás, közegellenállás, hőleadás. Ekkor az eltérő kezdőfeltételekkel indított pályák a fázistérnek egy nullmértékű részhalmazához tartanak.



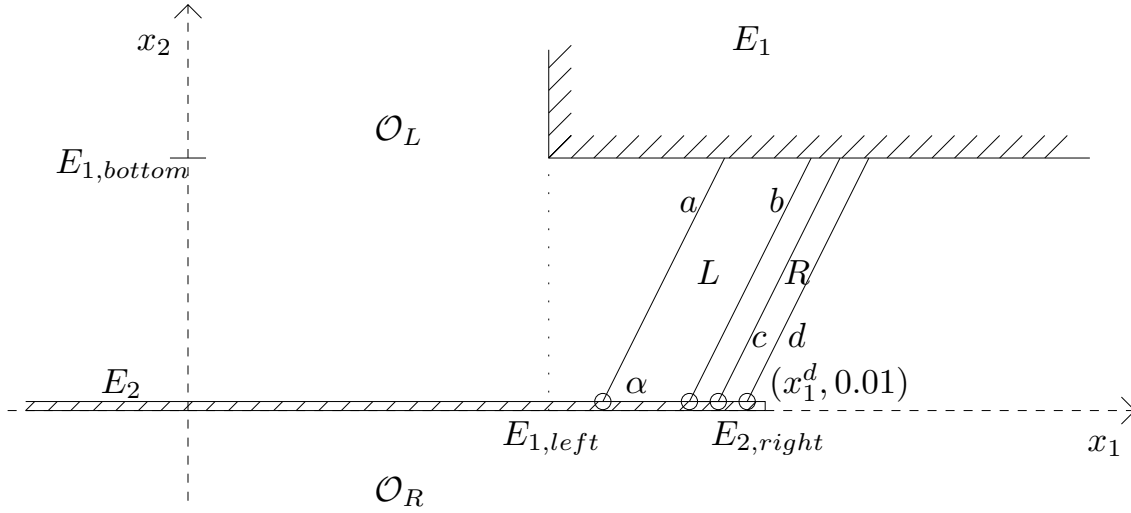
2.1. ábra. Az Hénon-leképezés dinamikája.



2.2. ábra. A különleges attraktor és a legfeljebb 6 periódusú pontok elhelyezkedése. (A körök nagysága fordítottan arányos a periódusszámmal.)

Ez a részhalmaz vonzza a pályákat, ezért attraktornak nevezzük. Egyszerűbb mozgásformák esetén az attraktor is egyszerű geometriájú alakzat, például pont vagy zárt görbe, bonyolultabb esetekben is „csak” egy torusz felszíne. Kaotikus mozgás esetén azonban az attraktor rendszerint egy fraktálszerkezettel bíró, igen bonyolult alakzat, egy úgynevezett különös attraktor. Ezt a pontthalmazt szokás még instabil sokaságnak is nevezni. Az Hénon-leképezés esetében ennek a különleges attraktor-nak egy részletét láthatjuk a 2.2. ábrán [25, 30, 63].

Vegyük észre, hogy például egy U típusú patkó esetén minden L - R sorozathoz létezik megfelelő pont, azaz például létezik az L, L, L, \dots sorozathoz is, és az R, R, R, \dots sorozathoz is. Ezekre a pontokra bizonyítható, hogy mindegyikük egy-egy periodikus pont. Azaz, hogy egy U típusú patkó kialakuljon, annak szükséges de nem elegendő feltétele, hogy létezzen legalább két darab periodikus pontja a Poincaré-leképezésnek. Tehát, ha az Hénon-leképezés magasabb iteráltjait vizsgáljuk, akkor szükséges két adott periódusú pont. Korábbi vizsgálatok alapján tudjuk [26, 28], hogy az Hénon-leképezésnek a klasszikus paraméterekkel 1 darab fixpontja ($x_1 = 0.6313$, $x_2 = 0.1894$), 1-1 darab kétperiódusú és négyperiódusú pontja, illetve 2 darab 6 periódusú pontja létezik az instabil sokaság közelében. Az Hénon-leképezés ezen periodikus pontjait is láthatjuk a 2.2. ábrán.



2.3. ábra. Az Hénon-leképezésnél használt régiók jelölésrendszere.

2.1.2. Numerikus módszer a kaotikusság bizonyítására

Vegyünk az alábbi – részben Zgliczyński által is használt [74, 75] – jelölésrendszert (lásd a 2.3. ábrát):

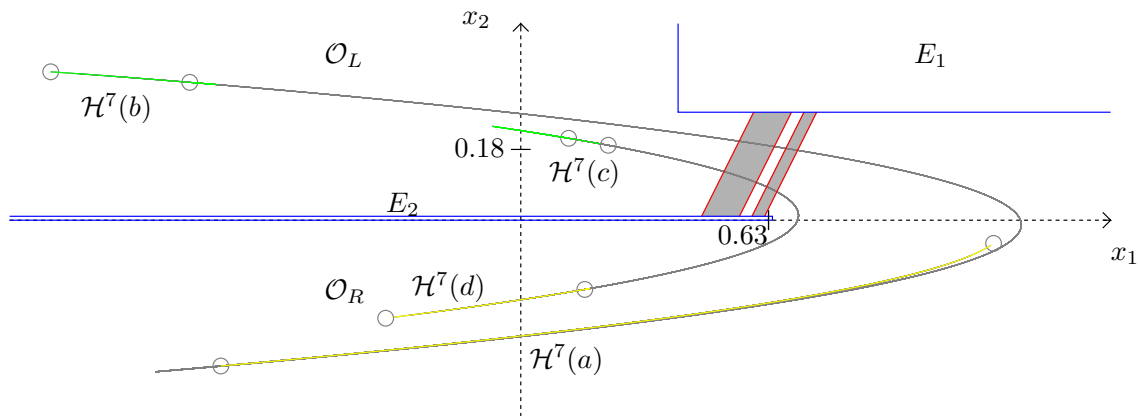
- $E = E_1 \cup E_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq E_{1,left}, x_2 \geq E_{1,bottom}\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq E_{2,right}, 0.0 \leq x_2 \leq 0.01\}$.¹
- $\mathcal{O}_L = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < E_{1,left}, x_2 > 0.01\}$,
 $\mathcal{O}_R = \{(x_1, x_2) \mid x_2 < 0.0\}$.
- Az a , b , c , és d rendre az L és R paralelogrammák bal-, illetve jobboldalai.
- A paralelogrammák x_1 tengellyel párhuzamos oldalainak koordinátái y_0 és y_1 , ahol $y_0 = 0.01$ és $y_1 = E_{1,bottom}$.
- Az alsó csúcsok x_1 koordinátái rendre x_1^a , x_1^b , x_1^c , és x_1^d .
- $\tan \alpha$ a paralelogramma bal alsó szögének tangense.

2.2. Tétel (Zgliczyński [75]). *Ha valamely k -ra az alábbi feltételek teljesülnek:*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k(a \cup d) &\subset \mathcal{O}_R, \\ \mathcal{H}^k(b \cup c) &\subset \mathcal{O}_L, \\ \mathcal{H}^k(L \cup R) &\subset (\mathbb{R}^2 \setminus E),\end{aligned}$$

akkor \mathcal{H}^k rendelkezik kaotikus tartománnyal.

¹Az eredeti értékek az $E_{1,left} = 0.4$; $E_{1,bottom} = 0.28$; $E_{2,right} = 0.64$ voltak.



2.4. ábra. Az Hénon-leképezés 7-dik iteráltjának kaotikus régiója. (Az a , b , c , és d oldalak végeinek a képet karikákkal jelöltük.)

Bizonyítás. A kaotikusság bizonyításhoz a fenti struktúrából egy homeomorf leképezést kell mutatni az 1.14. Tételben szereplő rendszerbe. (Megjegyzendő, hogy Zgliczyński nem a tételben szereplő általános szerkezetet használta a bizonyításhoz, hanem nála a leképezés képe egy pontosan definiált patkó volt.) A homeomorf kép esetén vegyük észre, hogy az Hénon-leképezéshez definiált szerkezetben az a , illetve a d oldalak nem érintkeznek az \mathcal{O}_L , illetve az \mathcal{O}_R régiókkal, valamint az E régió is csak két részből áll, nem négyből. Az első tulajdonság nem okoz gondot, mert ha a kimaradt részt hozzávesszük az \mathcal{O}_L , illetve az \mathcal{O}_R régiókhoz, akkor csak az első, illetve a második feltételt gyengítjük. A második tulajdonság esetén pedig, ha kiveszünk egy részt az E halmazból, akkor az két-két részre szakadna. Ezzel csak a harmadik feltételt gyengítjük, tehát az előző módosítások nem befolyásolják az állítást. Ezen észrevételek után már létezik egy alkalmas homeomorf leképezés, mellyel az állítást igazoltuk. ■

Zgliczyński az Hénon-leképezés 7-dik iteráltját vizsgálta.

2.3. Tétel (Zgliczyński [75]). *Az Hénon-leképezés 7-dik iteráltja rendelkezik L - R típusú U patkóval az alábbi paraméterekkel (lásd a 2.4. ábrát):*

$$x_1^a = 0.46, \quad x_1^b = 0.556, \quad x_1^c = 0.588, \quad x_1^d = 0.62,$$

$$y_0 = 0.01, \quad y_1 = 0.28, \quad \tan \alpha = 2.0.$$

Azaz a \mathcal{H}^7 rendelkezik kaotikus régióval.

Bizonyítás. Zgliczyński számítógéppel segített bizonyítást mutatott. Indulásképpen felső becslést adott az Hénon-leképezés Lipschitz-konstansára a $[-1.31, 1.31] \times [-1.1, 1.1]$ intervallumon. Ezen információ alapján már ki lehet számolni, hogy egy pont és annak kis környezete a pont képének mekkora környezetébe kerülhet. Ezt, és a számítógép pontosságát figyelembe véve meghatározta, milyen sűrű rácspontokra kell ellenőrizni a geometriai feltételeket, továbbá mennyivel kell kisebbre méretezni a megfelelő geometria alakzatokat. A numerikus ellenőrzéshez 60 000 rácspont képét számolta ki, ezekkel sikerült ellenőriznie a vizsgált feltételeket. ■

Az eljárás egyik nagy hátránya, hogy a kaotikus régió keresése alapvetően emberi beavatkozással történik, valamint az ellenőrzés is sok előzetes munkát igényel. Ezzel a módszerrel újabb kaotikus rendszerek vizsgálata hosszadalmas és nagyon időigényes lenne.

2.1.3. Intervallumos módszer a kaotikus régió bizonyításához

Az előzőekben láttuk, hogy Zgliczyński módszere csak emberi beavatkozással működik. Ahhoz, hogy képesek legyünk teljesen automatikusan újabb kaotikus régiók keresésére, egy a számítógép által automatikusan végrehajtható ellenőrző eljárásra van szükségünk. Ezzel eddig nem ismert kaotikus régiókat tárhatunk fel. A módszerünk az intervallumaritmetika, és egy adaptív korlátozás és szétválasztás (B&B) eljárás kombinációját használja. Az alkalmazott numerikus eljárás – a beépített kifelé kerekítés miatt – matematikai bizonyító erővel képes igazolni a megfelelő halmazba tartozást.

Az eljárásunkkal a patkó létezéséhez szükséges három geometriai feltételt külön-külön vizsgáljuk, azaz a B&B alapú eljárásunkat háromszor futtatjuk majd le. Első lépésben az L és R paralelogrammákat foglaljuk be egy kétdimenziós zárt intervallumba (I), mely a kezdő intervallum lesz. Ezután a B&B eljárásunk az adott geometriai feltétel bizonyítására olyan kétdimenziós részintervallumokat (I_i) generál a kezdő intervallumban, azt lefedve, melyekre teljesül az alábbi két eset valamelyike:

1. mindegyik részintervallumra igaz a káosz feltétele, vagy
2. mutat egy olyan kis részintervallumot (legfeljebb a felhasználó által beállított méretűt), amely megsérti az adott feltételt.

Ezek után Zgliczyński eredeti tételét az alábbi intervallumos formában is írhatjuk:

2.4. Tétel. *Ha valamely k -ra $\exists I_i^j (j \in \{1, 2, 3\}; i \in \{1 \dots n_j\})$ kétdimenziós intervallumok, melyekre:*

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, 2, 3\} : (L \cup R) &\subseteq \bigcup_{i \in \{1 \dots n_j\}} I_i^j \text{ és} \\ \forall I_i^1 : \text{ha } I_i^1 \cap (a \cup d) &\neq \emptyset, \text{ akkor } \mathcal{H}^k(I_i^1) \subset \mathcal{O}_R \text{ és} \\ \forall I_i^2 : \text{ha } I_i^2 \cap (b \cup c) &\neq \emptyset, \text{ akkor } \mathcal{H}^k(I_i^2) \subset \mathcal{O}_L \text{ és} \\ \forall I_i^3 : \text{ha } I_i^3 \cap (L \cup R) &\neq \emptyset, \text{ akkor } \mathcal{H}^k(I_i^3) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus E), \end{aligned}$$

akkor \mathcal{H}^k rendelkezik kaotikus régióval.

A tekintett \mathcal{H}^k leképezést jelöljük \mathcal{T} -vel, illetve az intervallumos befoglalását \mathcal{T} -vel. Mint az megfigyelhető, a három geometriai feltétel teljesen hasonló részhalmaz vizsgálaton alapul. Az egységes tárgyalás kedvéért, jelöljük az éppen tekintett \mathcal{O}_L , \mathcal{O}_R és a $\mathbb{R}^2 \setminus E$ nyílt halmazokat \mathcal{O} -val. Hasonlóan, jelöljük az $(a \cup d)$, $(b \cup c)$ és az $(L \cup R)$ halmazokat Q -val. Ezek után a 2.2. Tételben szereplő feltételek az alábbi, egyszerűsített formában írhatóak fel:

$$\mathcal{T}(Q) \subset \mathcal{O},$$

1. Algoritmus. Az ellenőrző eljárás.

- Input:*
- ϵ : a részintervallumok felhasználó által beállított minimális mérete,
 - Q : a vizsgált halmaz,
 - \mathcal{O} : az aktuális célhalmaz, melyre a $\mathcal{T}(Q) \subset \mathcal{O}$ feltételt kell ellenőrizni.
- Output:*
- A geometriai feltétel teljesül az adott Q halmaz minden pontjára, vagy
 - mutat egy olyan ϵ -nál kisebb méretű intervallumot, mely megsérti az adott feltételt.

- 1. lépés** Határozzuk meg a kezdő intervallumot.
- 2. lépés** Tegyük be ezt az intervallumot a verembe.
- 3. lépés** Vegyünk ki egy v intervallumot a veremből.
- 4. lépés** Határozzuk meg a v intervallum szélesebb oldalát.
- 5. lépés** Számoljuk ki a transzformált intervallumot, $w = T(v)$.
- 6. lépés** Ha a $v \cap Q \neq \emptyset$, és a $w \subset \mathcal{O}$ feltétel nem teljesül, akkor
 - ha a v intervallum szélesebbik oldala kisebb, mint a felhasználó által adott érték, akkor
 - kiírjuk v -t és STOP,
 - egyébként
 - felezzük el v -t a szélesebbik oldala mentén, rakjuk be a két részintervallumot a verembe, és folytassuk a 3. lépéssel.
- 7. lépés** Ha a verem üres, akkor írjuk ki, hogy a bizonyítás sikerült és STOP, egyébként folytassuk a 3. lépéssel.

ahol Q és \mathcal{O} rendre felveszik a tekintett halmazokat. A bemutatott algoritmusban (lásd az 1. Algoritmust) is ezen jelöléseket használjuk. Ez az algoritmus képes eldönteni, hogy egy adott rendszer rendelkezik-e olyan patkóval, melyet a 2.6. és a 2.7. Tételekben mondunk ki. Először vizsgáljuk meg azt, hogy az algoritmusunk képes ellenőrizni a geometriai feltételeket.

2.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy a \mathcal{T} leképezéshez rendelkezésre áll annak T befoglaló függvénye, valamint hogy az ellenőrző rutin azt az eredményt adja, hogy a $\mathcal{T}(Q) \subset \mathcal{O}$ vizsgált feltétel teljesül. Ekkor az ellenőrző rutin az ellenőrizendő tartomány köré írt (I) kiindulási intervallumnak egy olyan felosztását állítja elő, hogy minden részintervallumra teljesül, hogy*

- 1.** *vagy ennek a részintervallumnak nincs közös pontja a vizsgált Q tartománnyal,*
- 2.** *vagy ennek a részintervallumnak minden transzformált pontja benne van a feltételben szereplő \mathcal{O} halmazban.*

Ez a tétel azt jelenti, hogy az 1. Algoritmus helyes. A bizonyítása a [20] cikkben olvasható. Ezek után nézzük meg, hogy valóban képes-e eldönteni egy halmazról, hogy az rendelkezik-e patkóval.

2.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy a \mathcal{T} leképezéshez rendelkezésre áll annak olyan T befoglaló függvénye, amely zéró-konvergens, továbbá az algoritmus ϵ paramétere nulla, és a $T(Q) \subset \mathcal{O}$ tartalmazás fennáll. Ekkor az ellenőrző rutin véges sok iterációs lépés után megáll azzal az eredménnyel, hogy a káosz feltételei teljesülnek.*

Vizsgáljuk meg, hogy abban az esetben, ha nem teljesül az adott halmazra a káosz feltétele, akkor az 1. Algoritmussal milyen eredményre számíthatunk.

2.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy a \mathcal{T} leképezéshez rendelkezésre áll annak egy T befoglaló függvénye, továbbá az algoritmus ϵ paramétere nulla, és van olyan $x \in Q$ pont, hogy $T(x) \notin \mathcal{O}$. Ekkor az ellenőrző rutin nem tud véges lépésben megállni, és nem ad eredményt arra vonatkozóan, hogy a káosz feltételei teljesülnek-e.*

A 2.6. Tételben azt láttuk, hogy ha igazak a geometriai feltételek, akkor az algoritmus véges lépésben helyes eredménnyel megáll. A 2.7. Tétel kimondja, hogy abban az esetben, ha ϵ -t nullára állítjuk és nem teljesül a geometriai feltétel, akkor nem áll meg az algoritmus. Ha az ϵ paraméter pozitív értéket vesz fel, akkor a futás eredménye lehet sikertelen, de ez nem minden esetben jelenti azt, hogy nem teljesül a geometriai feltétel.

2.1.4. Az Hénon-leképezés 7-dik iteráltjára kapott numerikus eredmények

Tekintsük a 2.3. Tételben említett, Zgliczyński által publikált kaotikus régiót. Az Hénon-leképezés paraméterei a klasszikus $A = 1.4$ és $B = 0.3$ értékek. Az ellenőrizendő halmaz két paralelogrammából áll, melyek pontos paraméterei a 2.3. Tételben megtalálhatóak. Állítsuk be az ellenőrző algoritmusban szereplő ϵ küszöbszámot a 10^{-10} értékre.

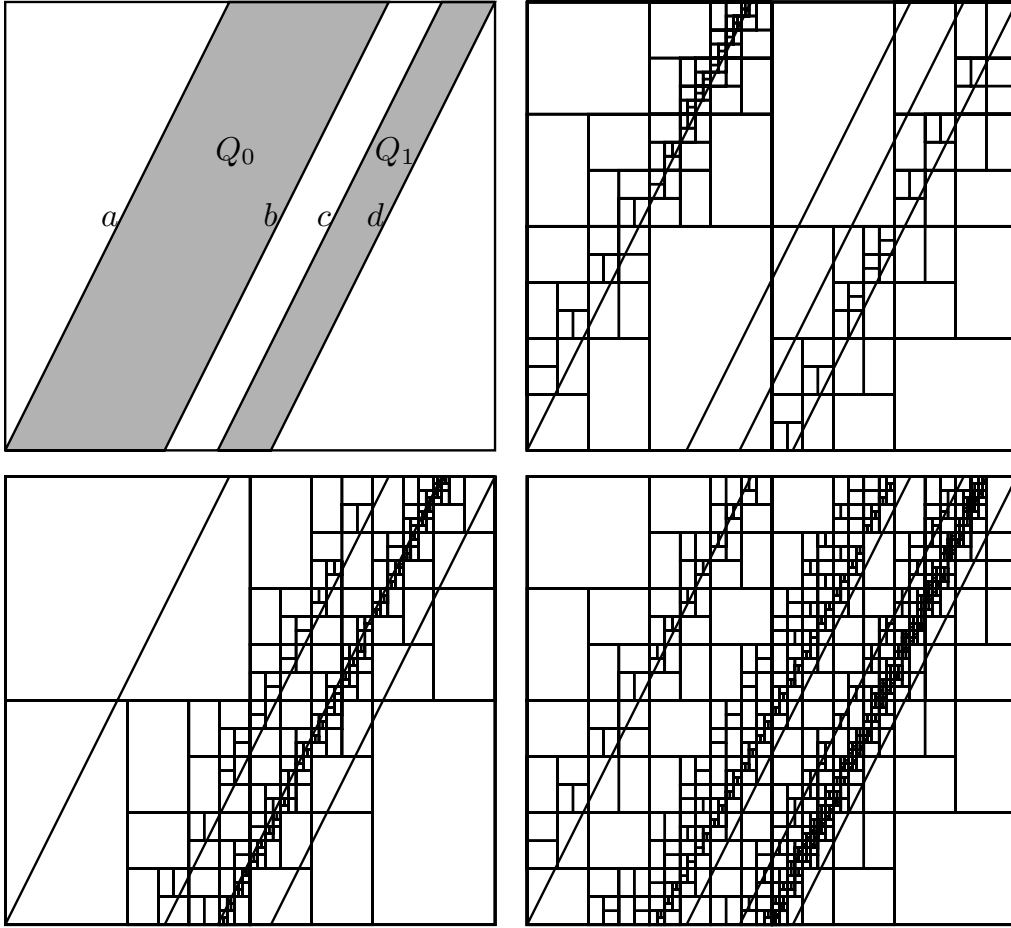
Első lépésként a kezdő intervallumot határozza meg az algoritmus. Mind a három feltétel esetében a következő kétdimenziós intervallum volt a kezdő intervallum:

$$[0.460000, 0.755000] \times [0.010000, 0.280000].$$

Ezután az algoritmus a három geometriai feltételt (egyiket a másik után) ellenőrizte. Mindhárom feltételre pozitív választ kaptunk. A részintervallumok száma rendre 273, 523 és 1 613 volt. Ez azt jelenti, hogy ennyi kétdimenziós intervallumra kellett kiszámolni az Hénon-leképezés 7-dik iteráltját. A legnagyobb veremmélység értéke rendre 11, 13 és 14 volt, amely a szükséges memóriával arányos. Ez a memóriaigény elhanyagolható. A teljes ellenőrzéshez szükséges CPU idő nem jelentős, mindössze pár másodperc volt egy átlagos PC-n.

Az algoritmus futása során létrejött részintervallumok a 2.5. ábrán láthatók, az L és R paralelogrammákkal. Az ábrán észrevehető sűrűsödések nagyobb számítás pontosság szükségességére utalnak az adott helyen.

Összegezve az eredményt: képesek voltunk teljesen automatikusan ellenőrizni egy korábban publikált kaotikus tartományra vonatkozó eredményt. Ezen technikával további kaotikus tartományt találhatunk. Például, ha az Hénon-leképezés paramétereit véletlenszerűen választjuk meg, akkor az eredeti paralelogrammákkal az alábbi esetekben sikerült kimutatni a kaotikus viselkedést:



2.5. ábra. Az L és R paralelogrammák, és az 1. Algoritmus által generált kétdimenziós intervallumok.

A	B
1.3555400848181643,	0.32668379383472889;
1.3465721096594685,	0.32450555140362324;
1.4403201855906845,	0.22585009468060412;
1.4136297518450903,	0.26880306437090162;

Ilyen, és ehhez hasonló eredmények a korábbi módszerrel, mely emberi beavatkozásokat igényelt, csak nehézkesen ellenőrizhetők.

2.1.5. Az Hénon-leképezés ismert kaotikus tartományának érvényessége

A kaotikus tartományok keresése előtt érdemes megvizsgálni, hogy mekkora intervallumon alkalmas a bizonyításra egy-egy ilyen, a bizonyításban szereplő paraméter. A technikánkban ennek megvizsgálására az 1. Algoritmusban leírt ellenőrző eljárást kombináltuk egy toleranciával optimalizáló eljárással [21, 40, 41] (lásd a 2. Algoritmust).

2. Algoritmus. Tolerancia optimalizáló eljárás.

Input: – ϵ : a felhasználó által beállított minimális méret a növelésre,
 – I : a kezdő intervallum.
Output: – Az I intervallum köré írt megfelelő halmaz.

1. lépés Inicializáljuk a kezdő intervallumot (I), és ellenőrizzük azt.
 2. lépés Számoljuk ki az új intervallumot, amellyel bővíteni szeretnénk a régi intervallumot.
 3. lépés Ellenőrizzük az új intervallumot az előbb említett ellenőrző eljárással, és ha szükséges, használjuk a darabolásos technikát.
 4. lépés Ha az intervallum megfelelő, akkor
 - növeljük vele a régit,
 egyébként
 - ha az összes irány hamis, akkor csökkentjük a növelés mértékét.
 5. lépés Ha a növelés mértéke kisebb mint ϵ , akkor STOP.
 6. lépés Folytassuk a 2. lépéssel, egy új iránnyal.
-

Először vizsgáljuk meg az A és B paraméterek érvényességét, miközben az összes többi paramétert változatlanul hagyjuk. A program előrehaladásának egy illusztráló részlete a következő:

```
[1.399999, 1.400000]; [0.300000, 0.300001];
[1.399999, 1.400000]; [0.300000, 0.310001];
[1.389999, 1.400000]; [0.300000, 0.310001];
...
[1.377699, 1.401300]; [0.277700, 0.310301];
[1.377599, 1.401300]; [0.277700, 0.310301];
```

Azaz az összes

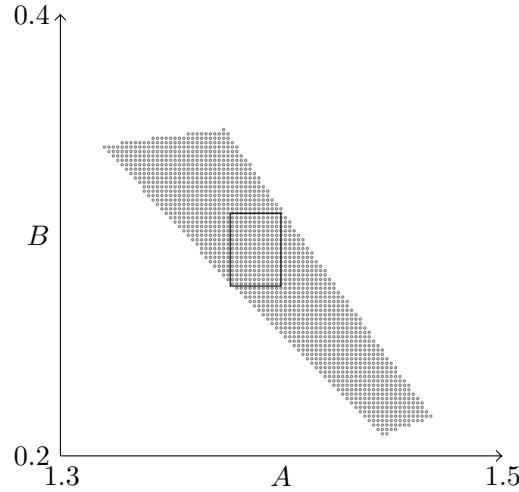
$$(A, B) \in [1.3776, 1.4013] \times [0.2777, 0.3103]$$

párra az eredeti L és R paralelogrammák rendelkeznek a patkóhoz szükséges tulajdonságokkal. Ezen intervallum elhelyezkedését, valamint további kaotikus paramétereket láthatunk a 2.6. ábrán.

Hasonló technikával kaptuk, hogy

$$1.964775 \leq \tan \alpha \leq 2.067229,$$

az összes többi paraméter változatlanul hagyása mellett. Ugyanez, az x_1^a , x_1^b , x_1^c



2.6. ábra. Az Hénon-leképezés kaotikus régióval rendelkező paramétereit.

(természetesen $x_1^b < x_1^c$) és x_1^d paraméterekre:

$$\begin{aligned} x_1^a &\in [0, 455609, 0.516032], \\ x_1^b, x_1^c &\in [0.544512, 0.590421], \\ x_1^d &\in [0.605679, 0.640000]. \end{aligned}$$

Ez utóbbi eredmény meghatározásához 23 perc CPU időre volt szükség.

A paraméterek érvényességének vizsgálata után elmondhatjuk, hogy a paraméterek egy nem nulla mértékű halmazán sikerült bizonyítani a patkó létezését. Emiatt, egy kereső eljárásnak jó esélye van egy új, a feltételeket kielégítő struktúra megtalálására, azaz egy új, mindeddig ismeretlen kaotikus régió feltárására.

2.2. Új kaotikus tartományok keresése egy optimalizáló eljárással

2.2.1. Optimalizáló eljárás kaotikus régiók keresésére

Most már rendelkezünk egy teljesen automatizált ellenőrző eljárással, így lehetőségünk van azt egy optimalizáló eljárással kombinálni, mellyel együtt képes lehet új kaotikus tartományok keresésére. Ezen optimalizáló eljárás paramétereit általában az Hénon-leképezés paramétereit (A, B), a paralelogrammák alsó csúcspontjainak x_1 koordinátái ($x_1^a, x_1^b, x_1^c, x_1^d$), a paralelogrammák oldalai által bezárt szög tangense ($\tan \alpha$), az E_2 halmaz jobb szélének a koordinátája ($E_{2, \text{right}}$), valamint az E_1 halmaz bal, és alsó szélének a koordinátái ($E_{1, \text{left}}, E_{1, \text{bottom}}$) lehetnek. Ez összesen 10 paraméter, melyek közül az adott feladatnak megfelelően válogathatunk.

Az optimalizáló eljárás egyik kulcsfontosságú tényezője az optimalizálandó függvény. Jelen esetben megkonstruálunk egy olyan nemnegatív büntetőfüggvényt, mely

megmutatja, hogy mennyire sérti meg az adott konstrukció a káosz létezésének feltételeit. Abban az esetben, ha a célfüggvény értéke 0, akkor az adott rendszerünk rendelkezik patkóval, és kapunk egy számítógéppel támogatott matematikai bizonyítást is a létezésére. Ha legalább egy feltétel sérül az adott paraméterek mellett, akkor a célfüggvény értéke legyen legalább C , ahol C egy számítógépen ábrázolható pozitív konstans.

Tekintsünk egy olyan példát, mikor az egyik

$$\mathcal{T}(Q) \subset \mathcal{O}$$

feltétel sérül. Ekkor az ellenőrző rutin visszaad egy olyan részintervallumot, mely tartalmaz legalább egy olyan pontot, amely megsérti a feltételt. Ezután számoljuk ki a transzformált intervallum $(T(I))$ és az \mathcal{O} halmaz Hausdorff-távolságát:

$$\max_{z \in T(I)} \inf_{y \in \mathcal{O}} d(z, y),$$

ahol $d(z, y)$ egy adott távolságfüggvény, két kétdimenziós pont között. Megjegyzendő, hogy ezen célfüggvény erősen befolyásolja az optimalizáló eljárás hatékonyságát. Fontos, hogy a minimalizálás során a kisebb célfüggvényérték egy jobb struktúrát jelentsen, azaz a „lejtés” iránya segítse a megfelelő paraméterek megtalálását. Emiatt az ellenőrző eljárást annyiban módosítottuk, hogy az a legtávolabbi nem megfelelő intervallumot adja vissza. A gyorsabb számítás végett mindig a legrosszabb eredményt mutató intervallumot vettük ki a veremből. Így, ha egy túl kicsi intervallumhoz jutottunk, akkor a veremben lévő összes elem távolsága kisebb a célterülettől, azaz a legtávolabbi rossz intervallumot kaptuk meg.

Ezek után az összes feltételre összegezzük ezen függvényeket. Így az alábbi formában írhatjuk fel az optimalizálási problémánkat:

$$\min_{x \in X} g(x),$$

ahol

$$g(x) = p \left(\sum_{i=1}^m \max_{z \in T(I_i)} \inf_{y \in \mathcal{O}_i} d(z, y) \right),$$

melyben x egy lehetséges paramétersorozat a keresendő halmazok koordinátáira; X egy n -dimenziós intervallum, mely a lehetséges megoldások halmaza; m a feltételek száma; I az ellenőrző eljárás által (x függvényében) visszaadott intervallum, amely sérti az adott feltételt; \mathcal{O}_i az i . feltétel célhalmaza; $p(y) = y + C$, ha bármely $I_i \neq \emptyset$, egyébként $p(y) = 0$ [20].

Az optimum-probléma helyességét az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

2.8. Tétel. *A kaotikus tartomány kereséssel kapcsolatban megfogalmazott egyszerű korlátokat tartalmazó globális optimalizálási feladatra a következő állítások érvényesek:*

1. *Amennyiben a globális optimalizálási algoritmus olyan x pontot talál, amelynek $g(x)$ célfüggvényértéke kisebb mint C , azaz amikor minden büntetőfüggvény*

komponens nulla, akkor a káosz összes feltétele teljesül az optimális x paraméterekhez tartozó tartományon. Ezzel egyidőben az ellenőrző rutin egy számítógéppel támogatott, garantált megbízhatóságú bizonyítást ad az érintett részalmaz relációkra.

2. Ha az adott feladathoz nem tartozik olyan paramétersor a keresési térben, hogy arra a megfelelő tartomány teljesítené a káosz feltételeit, akkor a $g(x)$ optimalizálása nem eredményezhet olyan közelítő minimumpontot, amelynek célfüggvényértéke C alatt lenne.

Jelen esetben az optimalizálandó paraméter a korábban említett 10 paraméter egy része lesz (például a paralelogrammák koordinátái), melyet a problémának megfelelően választunk meg. Megjegyezzük, hogy magának az optimalizáló eljárásnak nem kell megbízhatónak lennie, mivel a matematikai erejű bizonyítást a célfüggvényérték kiszámításakor érjük el, így tetszőleges optimalizáló eljárást használhatunk. A választásunk a több probléma esetén is bevált [5, 48] GLOBAL-ra esett [17].

2.2.2. L - R típusú káosz keresése az Hénon-leképezés 5-dik, 3-dik és 6-dik iteráltjára

Zgliczyński az Hénon-leképezés 7-dik iteráltját vizsgálta. Mivel magasabb iteráltak esetén a káoszban lévő kavarással jobban érvényesül, így kisebb iteráltakra nehezebb ilyen régiókat találni. Az Hénon-leképezésben van egy tükrözés a fixpontra, így a következő, hasonló szerkezettel bíró iterált az 5-dik.

A patkó létezéséhez két periodikus pont is szükséges, mivel az Hénon-leképezésnek – a klasszikus $A = 1.4$ és $B = 0.3$ paraméterekkel – csak 1-1 db 5 és 3 periodikus pontja van (az Hénon-leképezés fixpontja) a számunkra érdekes környezetben. Így a \mathcal{H}^5 és a \mathcal{H}^3 esetben csak úgy van értelme L - R típusú káoszt keresni, ha az Hénon-leképezés paramétereit is felhasználjuk az optimalizáló eljárásban, mint változó.

Az Hénon-leképezés 5-dik iteráltja esetében csak a leképezés A és B paraméterét, illetve a paralelogrammák alsó csúcspontjainak x_1 koordinátáját kerestük az alábbi intervallumban:

$$(A, B) \in [1.00, 2.00] \times [0.10, 1.00] , \quad x_1^a, x_1^b, x_1^c, x_d \in [0.40, 0.64].$$

A többi négy paramétert a 7-dik iteráltnál használt értékre állítottuk be. Ennek a hat paraméternek a változtatása elegendő volt a kaotikus tartomány létezésének igazolásához:

$$A = 1.7414857, \quad B = 0.38127953, \\ x_1^a = 0.40090670, \quad x_1^b = 0.50113505, \quad x_1^c = 0.51875196, \quad x_1^d = 0.63916903.$$

Ezen paraméterválasztás melletti kaotikus régiót láthatjuk a 2.7(a) ábrán. Az eljárás hatékonyságát a 2.1. táblázat illusztrálja. Mint az látható, az optimalizáló eljárás 10 futtatásból 9 alkalommal talált kaotikus régiót, és a szükséges idő minden esetben maximum 30 perc volt. Megjegyzendő, hogy az eljárás által talált összes kaotikus tartomány hasonló paraméterekkel rendelkezik. Valamint a 8. sorban is

LO	ZO	FE	PE	T
12	4	13,197	4,086	17
12	1	12,913	3,365	16
12	1	13,569	4,303	19
12	2	12,918	3,394	16
12	1	14,117	5,083	18
12	3	21,391	7,400	25
12	2	12,623	3,296	16
12	0	15,388	6,221	30
12	3	13,458	3,858	15
12	2	14,643	5,002	16

2.1. táblázat. Numerikus eredmények a \mathcal{H}^5 kaotikus tartományának keresésére. LO jelenti a megtalált lokális optimumok számát, ZO az ezek közül a 0 optimum értékkel rendelkezők számát, FE a célfüggvény kiértékeléseinek a számát, PE a büntető függvények kiértékelésének számát, és T a szükséges CPU időt percben.

nullához közeli megoldást láthatunk, ha a talált optimumból (1.0002598) kivonjuk a keresés során használt $C = 1$ konstanst. Azaz ezen paraméterek csak nagyon kis mértékben sértették meg a feltételeket.

A következő nehezebbnek vélt, de hasonló szerkezettel bíró iterált a 3-dik. Ebben az esetben már nem volt elegendő a 6 paraméter változtatása nagyobb keresési terület használata mellett sem. Sikeres eredményhez be kellett vennünk az optimalizálandó paraméterek közé a paralelogrammák oldalai által bezárt szöveget, illetve az E_i tartományok széleit, mellyel összesen 10-re nőtt a paraméterek száma. Mint a 2.2. táblázatban látható, a feladat – a véltnek megfelelően – nehezebbnek bizonyult, mint az előző esetben. A 10 futtatás során összesen egyszer talált megfelelő paramétereket az eljárásunk, míg a szükséges CPU idő és a függvény-kiértékelések száma is nőtt.

Az egyetlen megfelelő optimális megoldást, melyet megtaláltunk, a 2.7(b) ábrán láthatjuk:

$$\begin{aligned}
E_{1,bottom} &= 0.18937143, \quad E_{1,left} = 0.21673342, \quad E_{2,right} = 0.84386042, \\
A &= 2.5569088, \quad B = 0.15963498, \quad \tan(\alpha) = 3.3579163, \\
x_1^a &= 0.29188440, \quad x_1^b = 0.53887296, \quad x_1^c = 0.74663494, \quad x_1^d = 0.84359572.
\end{aligned}$$

A továbbiakban az Hénon-leképezés klasszikus paramétereivel foglalkozunk, azaz az $A = 1.4$ és a $B = 0.3$ paraméterekkel folytatjuk vizsgálatainkat. Vagyis a keresendő paraméterek száma emiatt kettővel csökken. Ilyen paraméterekkel a 6-dik, 4-dik és 2-dik iteráltaknak is lehet L - R típusú kaotikus régiója. Az Hénon-leképezés tükröző tulajdonsága miatt ezekben az esetekben a szerkezet kissé másként fog alakulni, melyre később térünk ki részletesebben. Az optimalizáló eljárás egyik erőssége, hogy nincs szüksége ezen szerkezet ismeretére, enélkül is képes megtalálni a kaotikus tartományokat. A sejtésünk ismét az, hogy a kisebb iteráltak esetében nehezebb kimutatni a patkó létezését, így a 6-dik iterálttal kezdtük a keresést.

LO	ZO	MV	FE	PE	T
4	0	1.0661465	33,742	17,396	43
1	0	1.1325119	24,730	21,820	172
1	0	1.00097	16,420	6,130	8
3	0	1.0929769	42,936	28,098	52
2	0	1.0004248	22,566	11,696	28
7	1	0.0	49,673	22,770	35
6	0	1.0006516	31,046	20,670	28
1	0	1.3397567	16,250	5,760	23
2	0	1.0003695	20,752	10,637	27
6	0	1.0007408	40,688	14,684	13

2.2. táblázat. Numerikus eredmények a \mathcal{H}^3 kaotikus régió keresésére. Az LO, ZO, FE, PE és T mutatóknak hasonló jelentése van, mint a 2.1. táblázatban, míg MV a legjobb lokális optimumot jelenti.

Ebben az esetben a paraméterek számának csökkentése érdekében az $E_{1,left}$ és $E_{2,right}$ értékeket rögzítettük az x_1^a és x_1^d változók értékeire. Ezzel összesen 6 paraméter maradt. A keresés sikeres volt, és az egyik eredmény, mely a 2.7(c) ábrán látható:

$$E_{1,bottom} = 0.2491759, \quad \tan(\alpha) = 1.9645949,$$

$$x_1^a = 0.5168849, \quad x_1^b = 0.60155904, \quad x_1^c = 0.62133119, \quad x_1^d = 0.76488491.$$

2.2.3. Az eljárás általánosítása

A patkó létezéséhez az \mathcal{O}_L , \mathcal{O}_R és E régiók csak segédterületek. Ezek segítségével azt érjük el, hogy az L és R régiók képei „átmenjenek” az L és R régiókon (lásd például a 2.4. ábrát). Vezessük be az alábbi, általánosabb definíciót [29, 56]:

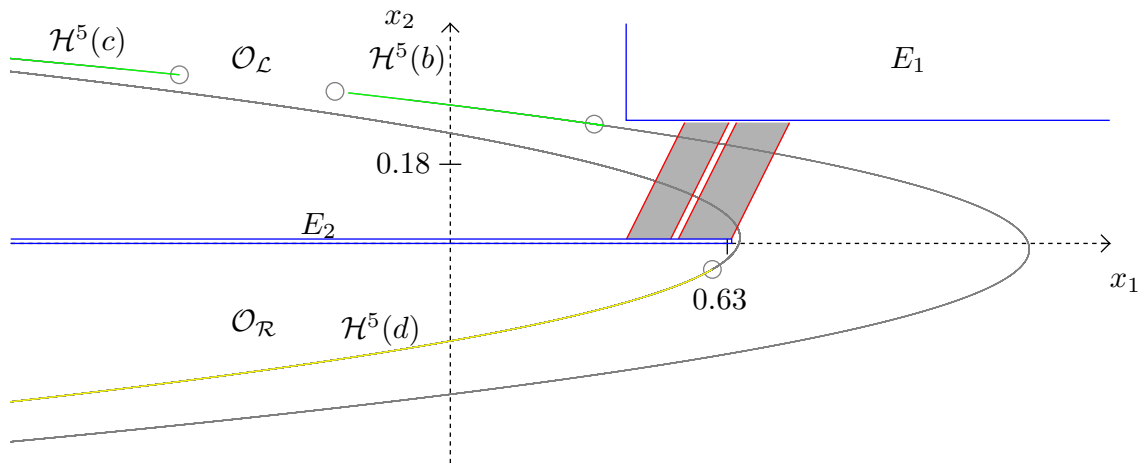
2.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy az N_i négyszög átfedi az N_j négyszöget az f leképezés mellett (jelölés: $N_i \xrightarrow{f} N_j$), ha

1. N_i f melletti képeinek nincs közös pontja N_j „vízszintes” oldalaival, és
2. N_i „függőleges” oldalainak f melletti képeinek nincs közös pontja N_j -vel, továbbá N_j átellenes oldalain vannak.

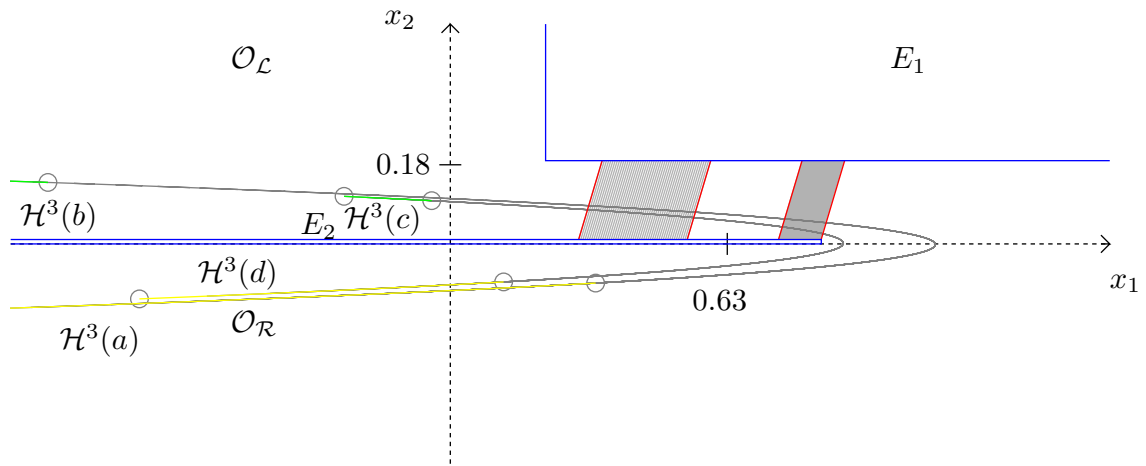
Ezek után, hogy létezzen L - R típusú patkója az Hénon-leképezés k -dik iteráltjának, ahhoz az alábbi 4 feltételnek kell teljesülnie az L és R diszjunkt halmazokra:

$$L \xrightarrow{\mathcal{H}^k} L, \quad L \xrightarrow{\mathcal{H}^k} R, \quad R \xrightarrow{\mathcal{H}^k} L \text{ és } R \xrightarrow{\mathcal{H}^k} R.$$

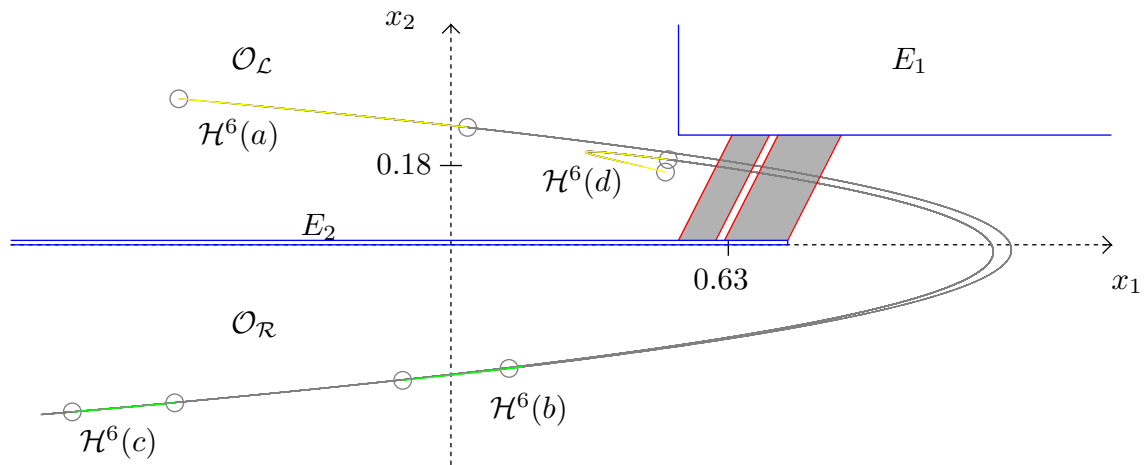
A könnyebb átláthatóság kedvéért vezessük be az alábbi jelölést:



(a) Az Hénon-leképezés 5-dik iteráltjára.



(b) Az Hénon-leképezés 3-dik iteráltjára.



(c) Az Hénon-leképezés 6-dik iteráltjára.

2.7. ábra. Az eredeti szerkezettel talált kaotikus tartományok az Hénon-leképezés különböző iteráltjai mellett.

2.10. Definíció. Tekintsük az N_1, \dots, N_p páronként diszjunkt négyszögeket. Ekkor az alábbi $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^p$ négyzetes mátrixot átmenetmátrixnak hívjuk, ha:

$$a_{i,j} = \begin{cases} k, & \text{ha } N_i \xrightarrow{f^k} N_j, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Azaz az alábbi átmenetmátrixszal kell rendelkezniük az L és R régióknak, hogy kaotikus legyen a rendszer:

	L	R
L	k	k
R	k	k

Ezzel a jelölésrendszerrel másfajta kaotikus régiókat is leírhatunk. Például az L - M - R típusú káosz nem teljes S patkójához az alábbi átmenetmátrix tartozik (az L és R tartomány egymáshoz való viszonyáról nem tudunk semmit, ezért üresen hagyjuk):

	L	M	R
L	k	k	
M	k	k	k
R		k	k

Ezen átmenetmátrixokat egy súlyozott élű irányított gráfként is értelmezhetjük, melyeket átmenetgráfnak fogunk hívni. A most említett két átmenetmátrixhoz tartozó átmenetgráfot a $k = 1$ esetben már láthattuk az 1.4(a) és az 1.4(c) ábrákon.

Az átfedési tulajdonság ellenőrzéséhez ismét tiltott- (E) és célterületeket (\mathcal{O}) definiálunk, melyek reményeink szerint elég általánosak lesznek ahhoz, hogy nehezebb feladatokat is meg tudjunk velük oldani. Az általunk adott megvalósításnál a régiók teljesen általános négyszögek lehetnek, míg a tiltott régiók ezen négyszögek csúcspontjaiból kiinduló párhuzamos félegyenések által bezárt területek lesznek. Az oldalak képeinek a célterületei ezen tiltott területektől jobbra, illetve balra eső tartományok. Egy ilyen összeállítást láthatunk a 2.8. ábrán. Az átfedéshez szükséges feltételeket az alábbi állításban foglalhatjuk össze:

2.11. Állítás. Azt mondjuk, hogy N_i négyszög f melletti képe átfedi N_j -t, ha

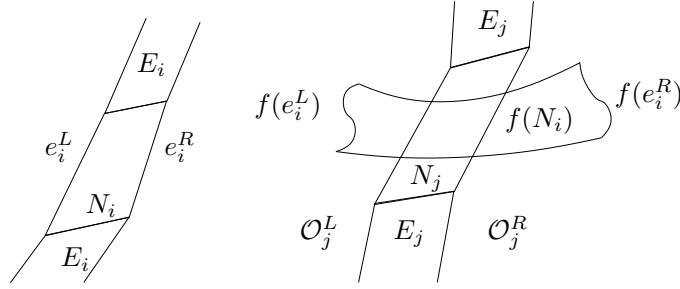
$$f(N_i) \subset \mathbb{R}^2 \setminus E_j, \text{ és}$$

$$(f(e_i^L) \subset \mathcal{O}_j^L \text{ és } f(e_i^R) \subset \mathcal{O}_j^R) \text{ vagy } (f(e_i^L) \subset \mathcal{O}_j^R \text{ és } f(e_i^R) \subset \mathcal{O}_j^L).$$

2.2.4. Káosz keresése az Hénon-leképezés 4-dik, 2-dik és 6-dik iteráltjára

Zgliczyński megközelítésével sikertelen volt – a klasszikus paraméterek mellett – a kaotikus régió keresése a 4-dik és 2-dik iteráltra. Ezért az előbb említett, általánosabban alkalmazható technikát próbáltuk meg használni. A 4-dik iterált esetében

²Az i index a sort, míg a j az oszlopot jelöli.



2.8. ábra. Az átfedési tulajdonság illusztrációja.

az L és R régiókat az alábbi területen kerestük:

$$\begin{aligned} V_{ul}^L &\in [0.0, 0.5] \times [0.20, 0.25], & V_{ur}^L &\in [0.2, 0.6] \times [0.20, 0.25], \\ V_{ll}^L &\in [0.0, 0.4] \times [0.01, 0.15], & V_{lr}^L &\in [0.2, 0.6] \times [0.01, 0.15], \\ V_{ul}^R &\in [0.3, 0.6] \times [0.20, 0.25], & V_{ur}^R &\in [0.6, 0.8] \times [0.20, 0.25], \\ V_{ll}^R &\in [0.3, 0.6] \times [0.01, 0.15], & V_{lr}^R &\in [0.6, 0.8] \times [0.01, 0.15], \end{aligned}$$

ahol a V -k jelentik az L és R négyszögek alsó(l) és felső(u), valamint jobb(l) és bal(r) csúcspontjainak a koordinátáit. Jelen esetben az E tartományokat meghatározó félegyeneselek meredeksége konstans 0.1. Az eljárásunk eredményes volt, és az alábbi optimumot találtuk a kapcsolódó optimalizálási feladathoz:

$$\begin{aligned} V_{ul}^L &= (0.16411140, 0.25423058), & V_{ur}^L &= (0.42592396, 0.23215738), \\ V_{ll}^L &= (0.10254433, 0.19021336), & V_{lr}^L &= (0.31142238, 0.04691830), \\ V_{ul}^R &= (0.54081838, 0.23803993), & V_{ur}^R &= (0.69119556, 0.21877527), \\ V_{ll}^R &= (0.43871354, 0.03378272), & V_{lr}^R &= (0.64446463, 0.03638828). \end{aligned}$$

Ezt az eredményt a 2.9(a) ábrán láthatjuk. Megjegyzendő, hogy a kereső által adott optimum a V_{ul}^L és V_{ll}^L csúcspontok esetében kívül esik a keresési területen. Ez a jelenség az alkalmazott optimalizáló eljárás helyi kereső rutinjának a tulajdonságával magyarázható. Nevezetesen azzal, hogy a helyi kereső eljárás a keresési területen kívül is kereshet lokális optimumot. Ezzel a tulajdonsággal a keresési terület esetleges helytelen megadása esetén is van rá esélyünk, hogy találjunk megfelelő optimumot.

A következő – nehezebbnek vélt – eset a 2-dik iterált volt, melyre az eljárásunk az előzőkhöz hasonlóan mind a 8 csúcspont keresésével talált optimális megoldást (lásd a 2.9(b) ábrát):

$$\begin{aligned} V_{ul}^L &= (-0.95008818, 0.38966840), & V_{ur}^L &= (-0.11192965, 0.33756351), \\ V_{ll}^L &= (-0.92886824, 0.25677498), & V_{lr}^L &= (-0.13972836, 0.21535493), \\ V_{ul}^R &= (-0.01309659, 0.33113756), & V_{ur}^R &= (0.70239604, 0.18263519), \\ V_{ll}^R &= (-0.13451910, 0.20890361), & V_{lr}^R &= (0.63453236, 0.02108996). \end{aligned}$$

A periodikus pontok számából tudjuk, hogy a klasszikus Hénon-leképezés paraméterei mellett nem létezik L - R típusú káosz az első, 3-dik és 5-dik iteráltak

esetén [65]. Így az elért eredményeinkkel a klasszikus paraméterek mellett az összes lehetségesnek vélt, 7-nél kisebb iterált esetén találtunk L - R típusú kaotikus régiót. A továbbiakban egy L - M - R típusú nem teljes S patkóval rendelkező káoszt keresünk, amely így bonyolultabb szerkezettel bír, mint az eddigiek. A periodikus pontok számából következik, hogy erre csak a 4-dik iterált esetén vagy annál nagyobbaknál van esélyünk. Elsőként a 6-dik iteráltat tekintettük. Egy sikeres eredményt láthatunk a 2.9(c) ábrán.

Megvizsgálva a szimbolikus logikát észrevehetjük, hogy az Hénon-leképezés 2-dik iteráltjánál talált L - R típusú kaotikus tartomány létezéséből következik, hogy az Hénon-leképezés 4-dik iteráltja rendelkezik 4 szimbólumos kaotikus tartománnyal. Ha ugyanis egymás után kétszer hajtjuk végre a \mathcal{H}^2 leképezést, akkor az Hénon-leképezés 4-dik iteráltját kapjuk. A kettő hosszú L - R sorozatokból pedig négy különböző van (LL , LR , RL és RR). Ezen párokat új szimbólummal jelölve láthatjuk, hogy az összes 4 szimbólumos sorozathoz létezik megfelelő pont, azaz létezik ilyen kaotikus régió. A 6-dik iterált esetében már egy teljes, 8 szimbólumos kaotikus régió is létezik. Megvizsgálva a 4-dik iterált kaotikus régiót látható, hogy az éppen a 2-dik iterált RL és RR párokat tartalmazó sorozataihoz tartozik.

Most vizsgáljuk meg azt, hogy a fixpont mely régióban található. Látható, hogy a 2-dik és a 4-dik iterált esetében a jobboldali régióban (R), míg a régi 6-dik iterált esetében a baloldaliban (L). Továbbá, az S típusú patkóval rendelkező 6-dik iterált esetében a középő halmaz tartalmazza a fixpontot.

A régi 6-dik iterált és az új S típusú kaotikus régióval rendelkező 6-dik iterált tehát nem ilyen típusú, ugyanis az Hénon-leképezésnek más szerkezetét használja ki. A 2-dik és a 4-dik iterált esetében az első bal oldali visszatérő ág alkotja a patkót, míg az L - R típusú \mathcal{H}^6 -os patkót, valamint az S típusú patkó egyik részét a jobboldali visszatérő ág alkotja. Következésképpen ez a szerkezet nem vezethető le a 2-dik iteráltnál talált kaotikus régióból.

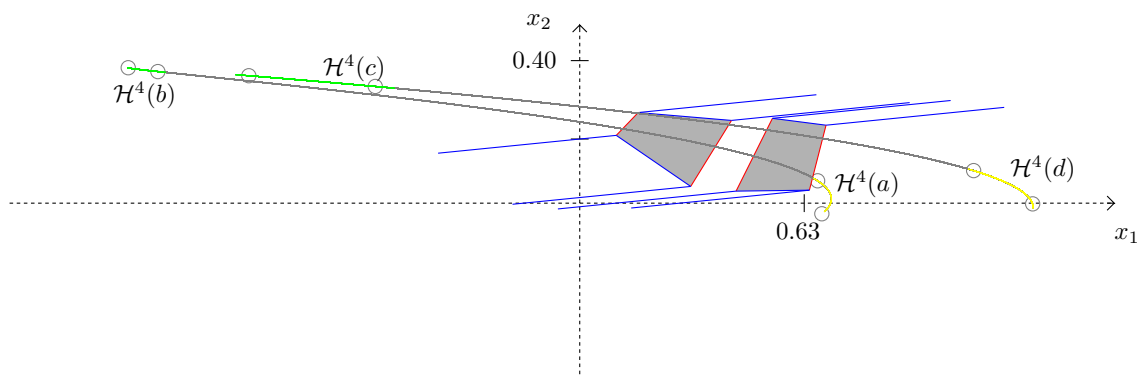
2.2.5. Kaotikus viselkedés egy területtartó Hénon-leképezés esetén

Az eddigi vizsgált összes Hénon-leképezés erősen területcsökkentő hatással rendelkezett, melyet a kétdimenziós intervallumok számításakor is tapasztaltunk. Így a tartalmazási tulajdonságok ellenőrzése is egyszerűbb. Az eljárásunk erősségét megvizsgálandó, megpróbálkoztunk egy olyan Hénon-leképezéssel, melyben ez a hatás nem tapasztalható.

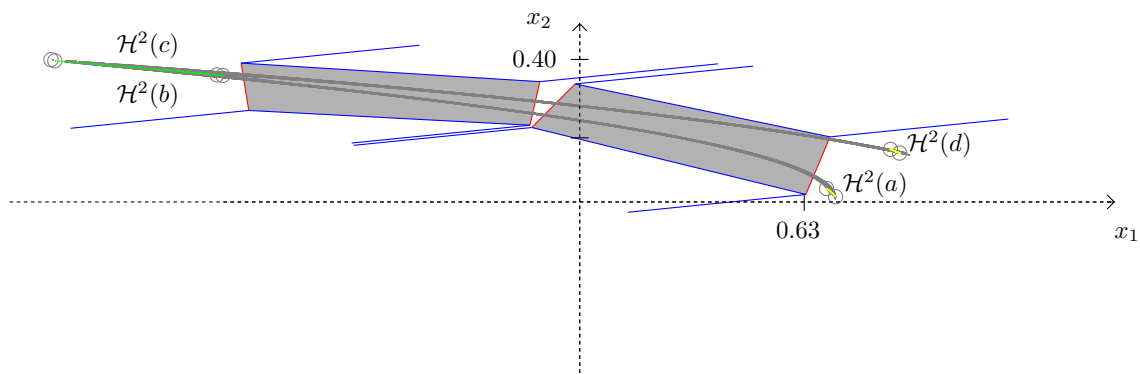
A leképezésre a területek nagyságának alakulását a Jacobi-mátrix determinánsa határozza meg. Az Hénon-leképezés Jacobi-mátrixa az alábbi:

$$J(\mathcal{H}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(1-Ax_1^2+x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(1-Ax_1^2+x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(Bx_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial(Bx_1)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2Ax_1 & 1 \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

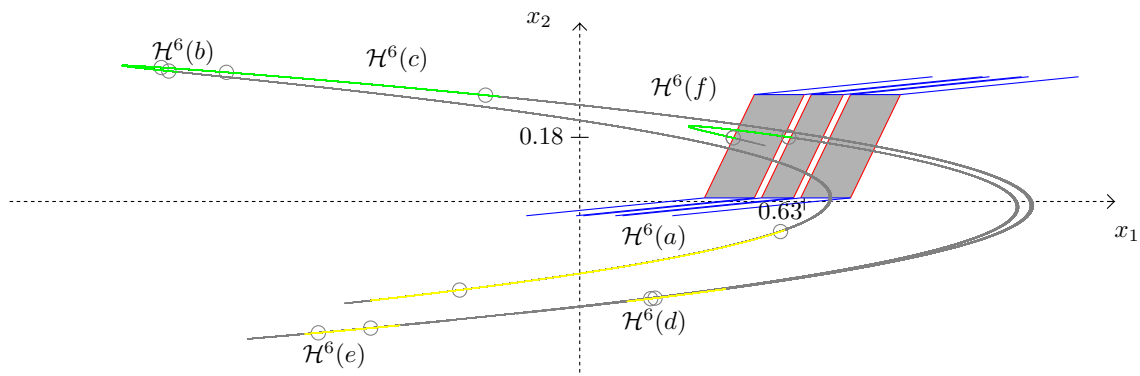
Mint látható a Jacobi-mátrix determinánsa $(-B)$, azaz az csak az Hénon-leképezés B paraméterétől függ. Következésképpen egy terület nagysága a B -szeresére változik egy Hénon-leképezés hatására. A klasszikus paraméterek mellett ez az arány



(a) Az Hénon-leképezés 4-dik iteráltjára.

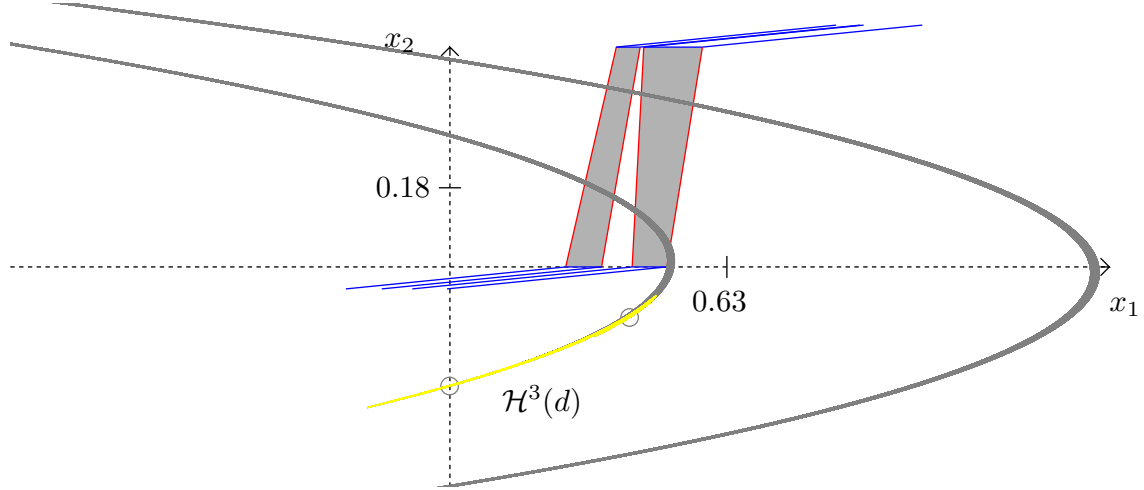


(b) Az Hénon-leképezés 2-dik iteráltjára.



(c) Az Hénon-leképezés 6-dik iteráltjára.

2.9. ábra. Az általánosított eljárással talált kaotikus tartományok az Hénon-leképezés klasszikus paramétereinek mellett.



2.10. ábra. Kaotikus régió egy területtartó Hénon-leképezés esetében.

0.3. A determináns negatív előjele pedig egy tükrözést jelent, azaz a klasszikus Hénon-leképezés esetén is van egy ilyen hatás.

Ha egy olyan Hénon-leképezést szeretnénk vizsgálni, amelyik területtartó, akkor a B paraméternek 1-nek kell lennie. Az A paramétert szabadon megválaszthatjuk. A kísérleteinkben azt tapasztaltuk, hogy minél nagyobb ez a paraméter, annál laposabb az instabil sokaság, és így könnyebb befoglalni négyszögekkel a kaotikus régiót. Ezen okok miatt a A paramétert 6.2-nek választottuk. Ezekkel a paraméterekkel a leképezés sokkal korábbi fázisban mutatja a kaotikus jelleget, így a 3-dik iterálttal is megpróbálkoztunk.

A keresés sikeres volt, és az optimalizáló az alábbi kaotikus régiót találta (lásd a 2.10. ábrán):

$$\begin{aligned} V_{ul}^L &= (0.37846661, 0.50), & V_{ur}^L &= (0.43276909, 0.50), \\ V_{ul}^L &= (0.26337142, 0.00), & V_{lr}^L &= (0.3449795, 0.00), \\ V_{ul}^R &= (0.44094381, 0.50), & V_{ur}^R &= (0.57439378, 0.50), \\ V_{ul}^R &= (0.41452329, 0.00), & V_{lr}^R &= (0.49339729, 0.00). \end{aligned}$$

2.3. Az Hénon-leképezés topologikus entrópiájának becslése

2.3.1. A szimbolikus dinamika és a topologikus entrópia

A topologikus entrópia jellemzi a pontok keveredésének mértékét, azaz ez egy mérőszám a káosz nagyságára [54]. A pontok keveredése jól mérhető a különböző trajektóriák számával [28]. Most definiáljuk, hogy mikor mondunk két trajektóriát különbözőnek.

2.12. Definíció. (n, ϵ) szeparálhatónak hívjuk az $E \subset X$ halmazt, ha minden két nem azonos $x, y \in E$ pontra létezik olyan j ($0 \leq j < n$), melyre az $f^j(x)$ és $f^j(y)$ pontok távolsága nagyobb, mint ϵ .

Két trajektóriát akkor mondunk különbözőnek, ha elegendően hosszú idő múlva a két pont közötti távolság jelentős. A következő definíció megadja, hogy hogyan kaphatunk ebből egy mérőszámot a káoszra.

2.13. Definíció. Az f leképezés topologikus entrópiája

$$H(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon),$$

ahol $s_n(\epsilon)$ a maximum (n, ϵ) szeparáló halmazok számossága.

Az entrópia tulajdonképpen a különböző pályák számosságát méri az idővel normalizálva. Minél többféle pályát tud bejárni egy rendszer adott idő alatt, annál nagyobb a kavarodás, azaz a káosz.

Nézzük meg, hogyan alakul a kapcsolat az átfedések és a hozzájuk tartozó szimbolikus logika között [71].

2.14. Tétel. Legyenek N_1, N_2, \dots, N_p páronként diszjunkt négyeszőgek. Legyen $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^p$ négyzetes mátrix, ahol

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } N_i \xrightarrow{f} N_j, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor f tartalmaz egy p darab szimbólumot tartalmazó szimbolikus dinamikát, az A átmenetmátrixszal.

Jelen esetben csak olyan átmenetmátrixok megfelelőek, amelyek csak nullákat és egyeseket tartalmaznak. A magasabb iteráltakra vonatkozó átfedési tulajdonságok esetében a részképeket felvéve módosíthatók az átfedési tulajdonságok. Ebben az esetben a diszjunkság sérülhet, és emiatt újabb feltételeket kell megvizsgálni. Ezen feltételekre az érintett esetekben külön ki fogunk térni.

Ezek után az alábbi tételt mondhatjuk ki az entrópia nagyságára (lásd a [28, 62] dolgozatokat).

2.15. Tétel. Az f leképezés topologikus entrópiája nem kisebb, mint az A átmenetmátrix legnagyobb sajátértékének természetes logaritmus, azaz

$$H(f) \geq \log \lambda_1,$$

ahol λ_1 az A mátrix legnagyobb sajátértéke.

Bizonyítás. Mivel a nemnegatív elemű mátrixok legnagyobb abszolút értékű sajátértéke nemnegatív, ezért a $\log \lambda_1$ létezik. Könnyen észrevehető, hogy az f leképezés topologikus entrópiája nem lehet kisebb, mint az A -val adott szimbolikus logikáé. Minden szimbolikus sorozathoz létezik olyan trajektória, mely az adott sorozatnak

felel meg. Ha ϵ kisebb, mint az N_i halmazok távolsága, akkor az összes lehetséges n hosszú sorozat szerepel $s_n(\epsilon)$ értékében. Véges esetben ismert az a tulajdonság, hogy az A átmenetmátrixszal adott szimbolikus logika entrópiája egyenlő az A mátrix legnagyobb sajátértékének logaritmusával. Ezzel az állítást bizonyítottuk. ■

A 2.15. Tétel segítségével már könnyen megtudunk adni egy alsó korlátot az f leképezés entrópiájára. Olyan síkidomokat kell keresni, melyek a leképezésre vonatkozóan rendelkeznek az átfedési tulajdonságokkal, és az ehhez tartozó átmenetmátrix legnagyobb sajátértéke egy alsó korlátot ad az entrópiára. Ebből adódóan olyan síkidomokat kell keresni, hogy a hozzájuk tartozó sajátérték minél nagyobb legyen. Mivel egy mátrix legnagyobb sajátértékét nehéz megjósolni, ezért a feladat ezen része csak kísérletezésből állhat. Azután, hogy egy lehetséges mátrixot sikerült találni, a megfelelő síkidomok megkeresése már automatikus módon is történhet.

2.3.2. A kaotikus tartomány alapján kapott eredmény az Hénon-leképezés entrópiájára

Amint azt láttuk, az Hénon-leképezés 2-dik iteráltja rendelkezik L - R típusú káosszal. Ebben az esetben n hosszú sorozatból 2^n darab van a vele ekvivalens szimbolikus dinamikában. Mivel \mathcal{H}^2 az Hénon-leképezés kétszeri alkalmazása egymás után, így elmondhatjuk, hogy az Hénon-leképezés esetében $2n$ hosszú sorozatból 2^n db létezik. Az entrópia definíciójából következik, hogy:

$$H(\mathcal{H}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \log 2^n = \frac{1}{2} \log 2 \approx 0.346.$$

A 2.15. Tétel segítségével is kiszámolhatjuk ezt az alsó korlátot az Hénon-leképezés entrópiájára. Az átfedési tulajdonságokat felhasználva teljesül, hogy léteznek olyan N_1 és N_2 négyszögek, melyekhez az alábbi átmenetmátrix tartozik:

	N_1	N_2
N_1	2	2
N_2	2	2

A magasabb iteráltak eltüntetéséhez – jelen esetben – található további két olyan tartomány ($N_{1,2}$ és $N_{2,2}$), amelyekre érvényes az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

átmenetmátrix, ahol a sorok és oszlopok rendre az N_1 -nek, $N_{1,2}$ -nek, N_2 -nek és az $N_{2,2}$ -nek felelnek meg. Ezen A mátrix legnagyobb sajátértéke 1.414, melynek logaritmusá szintén 0.346.

2.3.3. Lokális javítási lehetőségek

Galias és Zgliczyński 2001-ben publikált [28] egy rosszabb alsó korlátot az Hénon-leképezésre. A technikájuk teljes mértékben emberi beavatkozáson múlt, „kézzel történt”. A periodikus pontok és a stabil sokaság elhelyezkedésének ismeretében próbáltak elhelyezni olyan régiókat, melyek rendelkeznek a megkívánt átfedési tulajdonságokkal. Ebben a cikkben a legjobb alsó korlátot adó szerkezetben 5 négyszöget (P_i) vizsgáltak, melyek között az alábbi átfedéseket találták:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1				2	
P_2	2		2		
P_3	2	2			
P_4				1	3
P_5			1		

Ezen átfedéseket illusztráljuk a 2.11(a) ábrán, melyek ellenőrzéséhez összesen 9 átfedési feltételt kellett ellenőrizni. A 0-1-es mátrix egyértelmű megkonstruálása előtt olyan feltételeket kellett megvizsgálni, melyek szeparálják az alábbi lehetséges trajektóriákat: $P_4 \xrightarrow{\mathcal{H}} P_4 \xrightarrow{\mathcal{H}^2} P_5$ és $P_4 \xrightarrow{\mathcal{H}^3} P_5$. Ebben az esetben előfordulhat, hogy amit három hosszú útnak látunk, az valójában a másik kettő kombinációja. Ez azonban nem következik direkt módon, mert $\mathcal{H}^2(P_4) \cap P_5 \neq \emptyset$. A két trajektória elkülönítéséhez az alábbi három együttesen elegendő feltételt ellenőrizték:

$$P_4 \cap P_5 = \emptyset,$$

$$\mathcal{H}(P_4) \cap P_5 = \emptyset,$$

és

$$\mathcal{H}(P_5) \cap P_5 = \emptyset.$$

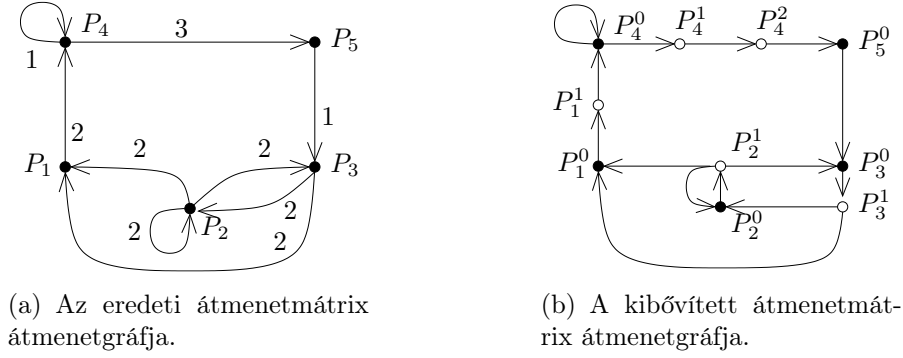
Az előző megkötések után kialakult átmenetmátrix a következő:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A -nak a legnagyobb sajátértéke 1.402, azaz az entrópiára egy 0.338-es alsó becslést kaptak. Ezt a kibővített átmenetmátrixot illusztráljuk a 2.11(b) ábrán.

A képek elhelyezkedését megvizsgálva az egyik kézenfekvő javítási lehetőségnek az tűnik, ha a $P_4 \xrightarrow{\mathcal{H}^3} P_5$ -t kicserélnénk a $P_4 \xrightarrow{\mathcal{H}^2} P_5$ -re. Ekkor a fenti trajektóriákat szeparáló feltétel a következőre változna:

$$\mathcal{H}(P_4) \cap P_5 = \emptyset.$$



2.11. ábra. Az átmenetmátrix kibővítése.

Az így kialakult, új átmenetmátrix sajátértéke 1.430 lenne, amelyből egy jobb, 0.357-es alsó korlátot kapnánk az entrópiára. Az eredeti 5 négyszög azonban nem teljesíti ezt az új átmenetmátrixot. A probléma éppen a $P_4 \xrightarrow{\mathcal{H}^2} P_5$ átmenettel van. Azaz a négyszögeket úgy kell megváltoztatni, hogy igaz legyen az átfedés és közben a többi feltétel se sérüljön. Az Hénon-leképezés dinamikája miatt, a feltétel teljesüléséhez elegendő lehet a P_4 négyszög jobb oldalát változtatni. Ha csak ezt változtatjuk, akkor a $\mathcal{H}(P_4) \cap P_5 = \emptyset$ tulajdonság sem sérül, mivel ez a feltétel érvényessége az Hénon-leképezés fixpontjának elhelyezkedése és tükröző hatása miatt csak a P_4 tartomány bal oldalától függ. Így először csak ezzel próbálkoztunk. Az optimalizáló eljárás sikeres volt, azaz az új feltételeknek megfeleltek az eredeti P_1 , P_2 , P_3 és P_5 négyszögek, valamint a

$$V_{ul}^{P_4} = (0.638, 0.28), \quad V_{ur}^{P_4} = (0.750, 0.28),$$

$$V_l^{P_4} = (0.518, 0.07), \quad V_{lr}^{P_4} = (0.650, 0.07)$$

csúcspontokkal rendelkező négyszög.

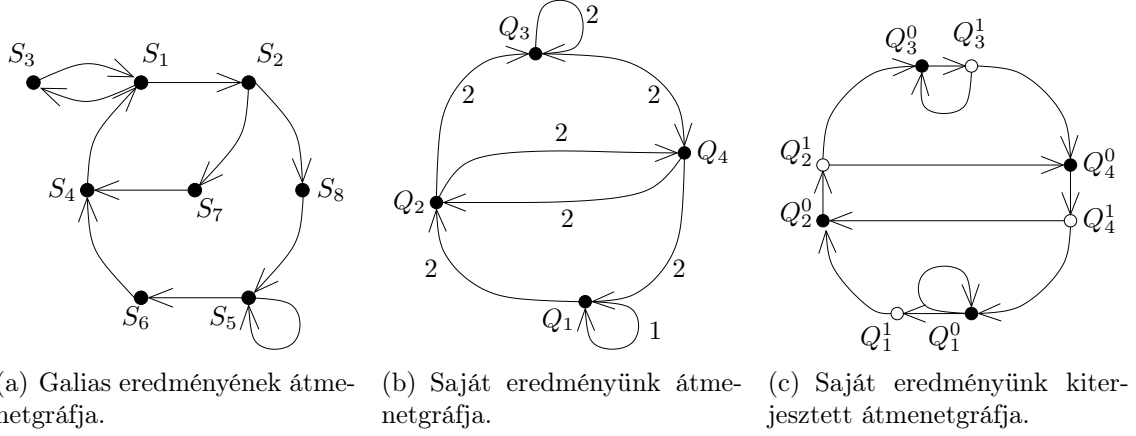
2.3.4. További eredmények

Galias egy későbbi cikkében [27] publikált további két, az előzőeknél jobb eredményt a Hénon-leképezés entrópiájára. Az eredményei továbbra is teljesen emberi beavatkozással jöttek létre. A gyengébb eredménye esetén összesen nyolc négyszöggel dolgozott, melyek átmenetmátrixát illusztráljuk a 2.12(a) ábrán. A mátrix legnagyobb sajátértéke 1.465, azaz az entrópia legalább 0.382.

A periodikus pontok ismeretében több kísérletet is tettünk arra, hogy optimalizáló eljárásunkkal különböző átmenetmátrixoknak megfelelő négyszögeket keressünk. Az egyik legjobb, sikeres eredményt az entrópiára a következő átmenetmátrix alkalmazásával nyertük:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Q_1	1	2		
Q_2			2	2
Q_3			2	2
Q_4	2	2		

(2.1)



2.12. ábra. Átmenetmátrixok azonos karakterisztikus polinomokkal.

A fenti átmenetmátrixot és a belőle konstruálható 0-1-es átmenetmátrixot ilusztrálja a 2.12(b) ábra és a 2.12(c) ábra. Az egyértelmű 0-1-es mátrix megkonstruálásához szükség van még a $\mathcal{H}(Q_1) \cap Q_2 = \emptyset$ feltételre. A négy darab Q_i tartomány – ezen feltételek melletti – keresése az eljárásunkkal sikeres volt, és az egyik sikeres eredmény (lásd a 2.13. ábrán):

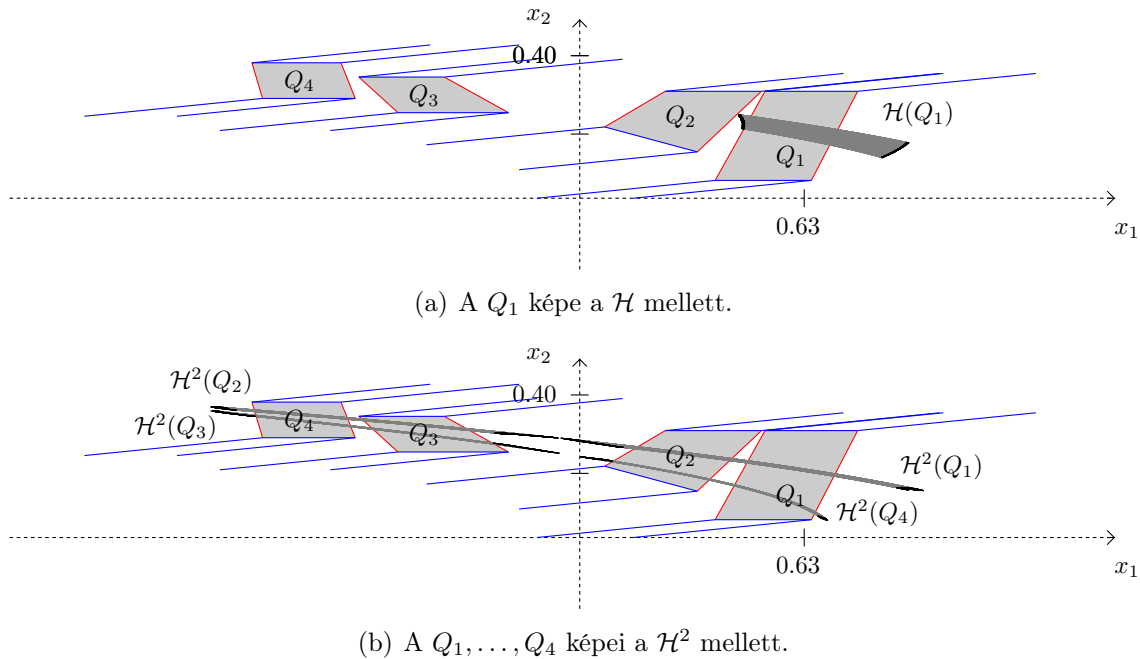
$$\begin{aligned}
 V_{ul}^{Q_1} &= (0.52, 0.30), & V_{ur}^{Q_1} &= (0.78, 0.30), \\
 V_{ll}^{Q_1} &= (0.38, 0.05), & V_{lr}^{Q_1} &= (0.65, 0.05), \\
 V_{ul}^{Q_2} &= (0.24, 0.30), & V_{ur}^{Q_2} &= (0.51, 0.30), \\
 V_{ll}^{Q_2} &= (0.07, 0.20), & V_{lr}^{Q_2} &= (0.33, 0.13), \\
 V_{ul}^{Q_3} &= (-0.62, 0.34), & V_{ur}^{Q_3} &= (-0.38, 0.34), \\
 V_{ll}^{Q_3} &= (-0.51, 0.24), & V_{lr}^{Q_3} &= (-0.20, 0.24), \\
 V_{ul}^{Q_4} &= (-0.92, 0.38), & V_{ur}^{Q_4} &= (-0.67, 0.38), \\
 V_{ll}^{Q_4} &= (-0.89, 0.28), & V_{lr}^{Q_4} &= (-0.63, 0.28).
 \end{aligned}$$

A fenti fedési mátrixhoz tartozó 0-1-es mátrix karakterisztikus polinomja a

$$p(\lambda) = \lambda^8 - \lambda^7 - \lambda^6 + \lambda^5 - \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2.$$

Ez azonos a 2.12(a) ábrán látható átmenetgráffal adott Galias eredményéhez tartozó karakterisztikus polinommal. Így e két struktúrából kapott eredmény entrópiája megegyezik, miközben a két átmenetmátrix teljesen különböző (lásd a 2.12(a) ábrát és a 2.12(c) ábrát).

Korábbi eredményeinkből tudjuk, hogy az Hénon-leképezés 2-dik iteráltja rendelkezik 2 szimbólumos káosszal. Ennek bizonyításához felhasznált patkó szerkezetét láthatjuk a 2.14(a) ábrán. Tudjuk továbbá, hogy az Hénon-leképezés 4-dik iteráltja rendelkezik 4 szimbólumos káosszal, amely a második iterált kaotikus régiójából ered. Ha a jelenleg vizsgált átmenetmátrixunkban kicseréljük a $Q_1 \xrightarrow{\mathcal{H}} Q_2$ -t a $Q_1 \xrightarrow{\mathcal{H}^2} Q_2$ -re, akkor a 2.14(b) ábrán látható átfedéseket kapjuk. Ez a fedési szerkezet létezik is, és pontosan ezt láthatjuk a 2.13(b) ábrán. Ha pedig az ebben a



2.13. ábra. A számítógéppel talált megfelelő 4 régió a (2.1) átmenetmátrixhoz.

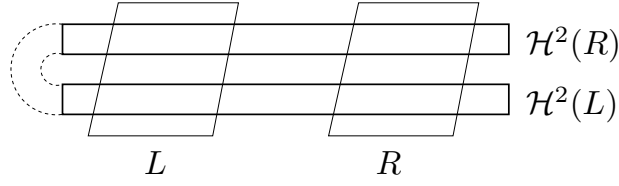
szerkezetben lévő leképezéseket kétszer alkalmazzuk egymás után, akkor éppen a 4 szimbólumos káoszt kapjuk meg.

A Q_1 és Q_2 régiók egyesítése tehát megfelel a 2-dik iterált kaotikus régió R régiójának, illetve Q_3 és Q_4 az L -nek. A különbséget a 0.346 és a 0.382 entrópiaérték között az okozza, hogy az utóbbi esetben kihasználtuk, hogy az egyik 2 periódusú pont a fixpont miatt jön létre (lásd a 2.13(a) ábrán).

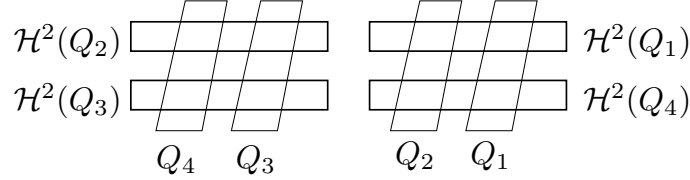
Összegezve a technikánk újdonságát, míg Galias az ellenőrzéstől a keresésig mindent kézzel végzett, addig a mi módszerünk esetében az ellenőrzés teljesen automatizált, és a keresés is csak minimális emberi beavatkozást igényel.

Galias ezen cikkében [27] megemlíti még egy 29 régiót tartalmazó átfedés mátrixot, mellyel 0.430-et kapott alsó korlátnak. Ez az érték már nagyon közel van a sejtett valódi entrópiához [28], a 0.465-es értékhez. Az értékek alakulását láthatjuk a 2.15. ábrán.

Ezen érték megjavítása módszerünkkel – tapasztalataink alapján – nem lehetséges. Ennek egyik oka, hogy a módszerünk nem képes automatikusan jobb átfedés mátrixot keresni, így „kézzel” kellene olyan mátrixokat találni, melyek jobb entrópiát adnak. A másik probléma, hogy jobb entrópia eléréséhez valószínűleg több síkidomra volna szükség, melyek nem feltétlenül négyszögek, így az optimalizálandó paraméterek száma is nagyon sok lenne, ami a kereséshez szükséges idő növekedéséhez vezetne.

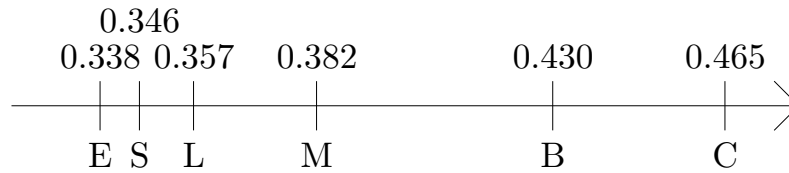


(a) A 2 szimbólumos patkó szerkezete.



(b) A 4 szimbólumos patkó szerkezete.

2.14. ábra. A 2 és 4 szimbólumos patkó kapcsolata.



2.15. ábra. Az Hénon-leképezés entrópiájára bizonyított alsó korlátok alakulása. Az E érték Galias és Zgliczyński első eredményét, S a \mathcal{H}^2 -ből kapott eredményünket, L a lokális kereséssel kapott eredményünket, M a Galias által kapott és az azonos eredményünket adó értéket, B az eddig ismert legjobb eredményt, míg C a sejtett értéket jelöli.

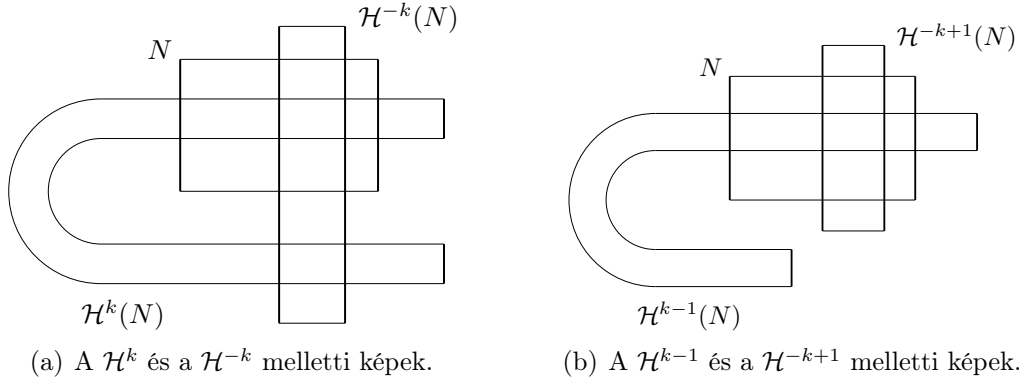
2.4. A kaotikus viselkedés bizonyítása az Hénon-leképezés magasabb iteráltjaira

2.4.1. Smale bizonyítása

Tudjuk, hogy az Hénon-leképezés 2-dik, 4-dik, 6-dik és 7-dik iteráltja rendelkezik L - R típusú káosszal. A periodikus pontok számából ismeretes, hogy az Hénon-leképezés nem rendelkezik hasonló régióval, továbbá a 3-dik és 5-dik iteráltak sem rendelkezhetnek. A sejtésünk az, hogy a 7-dik iterált után minden iterált rendelkezik kaotikus tartománnyal.

Smale adott egy tisztán elméleti bizonyítást arra, hogy az Hénon-leképezés összes magasabb iteráltjainak létezik L - R típusú kaotikus tartománya [64]. A bizonyításban csak azt mondta ki, hogy egy elég nagy iterációs szám után biztosan létezik ilyen régió. De ezen iteráció nagyságára konkrét értéket nem adott meg.

Bizonyítása során egy kétdimenziós régió (N) adott iteráltak melletti képeit és őseit vizsgálta. Az állítás igazolásához ezen régió k -dik és $(-k)$ -dik képének két átfedésének kell lenni. Az átfedések a stabil és az instabil sokaság metszéspontjainál



2.16. ábra. A Smale bizonyításában szereplő átfedések szerkezete.

jöhetnek létre. Az egyik ezek közül biztosan a fixpont környezetében található. A másik átfedési pontra teljesülni kell, hogy a $(k-1)$ -dik és a $(-k+1)$ -dik iterált képei még nem érik el ezt az átfedési régiót. Így ezen második átfedést a stabil és instabil sokaság második metszéspontjában kell keresni. Ezt a szituációt láthatjuk a 2.16. ábrán. Smale azt állítja, hogy létezik ilyen tulajdonságokkal rendelkező régió, és ebben az esetben minden $k' \geq 2k$ iteráltra mindig létezik kaotikus régió. Bizonyításában nem használta ki a k és a $(-k)$ közötti szimmetriát, így nyugodtan vehetünk k -t és $(-l)$ -et is. Természetesen ebben az esetben a $(k-1)$ -dik és a $(-l+1)$ -dik iteráltaknak nem szabad elérni az említett új átfedési régiót.

Jelen problémánál is használhatjuk a feltételek megfogalmazásához az átfedési tulajdonságot. Vegyük észre, hogy ezen átfedési tulajdonság szimmetrikus abban az értelemben, hogy ha $N_1 \xrightarrow{f} N_2$, akkor N_2 is átfedi $f(N_1)$ -et. Ezt a tulajdonságot felhasználva vezessük be az alábbi új jelölést a fedésre:

$$\langle f(N_1); N_2 \rangle, \text{ ha } N_1 \xrightarrow{f} N_2.$$

Ezzel azt is tudjuk jelölni, ha egy adott régiónak az Hénon-leképezés k -dik és $(-l)$ -dik képei fedik egymást:

$$\langle \mathcal{H}^k(N); \mathcal{H}^{-l}(N) \rangle.$$

Smale bizonyításában a megfelelő régiók kétszeresen is átfedik egymást. Így a két átfedés területét azonosítsuk Q_1 -gyel és Q_2 -vel. A Q_1 régió legyen a fixpont környezetében, míg a Q_2 a k -dik és a $(-l)$ -dik leképezésben kialakult metszéspont környezetében. Jelöljük a Q_1 -en kívüli területet $\overline{Q_1}$ -sal. Olyan kétdimenziós régiót (N) kell tehát találni, melyre az alábbi feltételek igazak:

$$\langle \mathcal{H}^k(N) \cap Q_1; \mathcal{H}^{-l}(N) \cap Q_1 \rangle, \quad (2.2)$$

$$\langle \mathcal{H}^k(N) \cap Q_2; \mathcal{H}^{-l}(N) \cap Q_2 \rangle, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{H}^{k-1}(N) \cap Q_2 = \emptyset, \quad \mathcal{H}^{-l+1}(N) \cap Q_2 = \emptyset,$$

és

$$(\mathcal{H}^{k-1}(N) \cap \overline{Q_1}) \cap (\mathcal{H}^{-l+1}(N) \cap \overline{Q_1}) = \emptyset.$$

Vegyük észre, hogy két régió kétféleképpen is átfedheti egymást: „vízszintesen”, illetve „függőlegesen”. Jelöljük ezeket a különböző átfedéseket $\langle N_1; N_2 \rangle_v$ -vel, ha N_1 vízszintesen fedi N_2 -t, és $\langle N_1; N_2 \rangle_f$ -fel, ha N_1 függőlegesen fedi N_2 -t. Természetesen az átfedés szimmetriájából következik, hogy

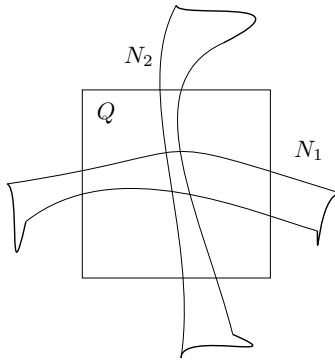
$$\langle N_1; N_2 \rangle_v \equiv \langle N_2; N_1 \rangle_f.$$

Egyszerűen belátható (lásd a 2.17. ábrát), hogy ha

$$\langle N_1; Q \rangle_v \text{ és } \langle N_2; Q \rangle_f,$$

akkor

$$\langle N_1; N_2 \rangle_v.$$



2.17. ábra. A vízszintes és függőleges átfedés kapcsolata.

Ezen egyszerű észrevétel után Smale bizonyításához szükséges (2.2) és (2.3) feltételek az alábbi formában is felírhatók:

$$\langle \mathcal{H}^k(N); Q_1 \rangle_v, \langle \mathcal{H}^{-l}(N); Q_1 \rangle_f,$$

$$\langle \mathcal{H}^k(N); Q_2 \rangle_v, \text{ és } \langle \mathcal{H}^{-l}(N); Q_2 \rangle_f.$$

Ezzel az átfogalmazással elérhetjük azt, hogy míg az eredeti feltételek esetén két bonyolult alakzat átfedését kell vizsgálni, itt elegendő a Q_1 -et és Q_2 -t egy-egy egyszerű négyszögnek tekinteni, mellyel az ellenőrzés egyszerűbbé válik.

Az Hénon-leképezés dinamikáját megvizsgálva látható, hogy az instabil sokaság feletti rész ösképei fentebb, míg az alatta lévő rész ösképei lentebb kerülnek. Így a $(-l)$ -dik kép szükséges elhelyezkedéséből következik, hogy a számunkra megfelelő rész határainak ezen sokaság alatt és felett kell elhelyezkedniük. Észrevehető, hogy az Hénon-leképezés egy ideig a fixponttól eltolja a pontok képét, majd visszahozza. Azaz a síkidomunk jobb és bal szélei a fixpont jobb és bal oldalán fognak elhelyezkedni.

Az Hénon-leképezés tükröző hatása miatt fontos szerepet kap, hogy az N régió szimmetrikus legyen a fixpontra. A matematikai bizonyításban az Hénon-leképezés deriváltjaira felhasznált becslések szükségessé tesznek a megfelelő síkidomra bizonyos

további megkötéseket. A síkidom oldalainak párhuzamosnak kell lennie az instabil és stabil sokaság irányával, továbbá az oldalak hosszainak aránya sem lehet nagy. Azaz a megfelelő síkidom egy olyan paralelogramma, melynek csúcspontjait két paraméter határozza meg, a két oldal nagysága.

2.4.2. Számítógéppel segített keresés

A megfelelő síkidom csúcspontjainak a fixpont környékén kell lennie. A fixpont garantált befoglalása:

$$([0.631354, 0.631355], [0.189406, 0.189407]).$$

E körül fogjuk megkeresni a Smale bizonyításának megfelelő síkidomot. A csúcspontok meghatározásához szükségünk lesz a fixpontban a stabil és instabil sokaság irányára. Ezt a Jacobi-mátrix sajátvektorjai határozzák meg, melyeknek normalizálás után a garantált befoglalásai:

$$s_1 = ([-0.988060, -0.988056], [0.154083, 0.154085]),$$

$$s_2 = ([0.461223, 0.461233], [0.887280, 0.887284]).$$

A keresés során ezen vektorok $\pm\mu$ és $\pm\nu$ -szőrösét fogjuk hozzáadni a fixponthoz. Így egy fixpontra szimmetrikus paralelogrammát kapunk. Mivel a vektorokat normalizáltuk, így a megfelelő síkidom oldalainak az aránya egyszerűen ellenőrizhető a μ és ν arányával.

A kétszeres átfedéshez szükséges Q_1 és Q_2 régiókat a stabil és instabil sokaság elhelyezkedése alapján a

$$\begin{aligned} V_{ul}^{Q_1} &= (0.50, 0.25), & V_{ur}^{Q_1} &= (0.70, 0.25), \\ V_{ll}^{Q_1} &= (0.50, 0.13), & V_{lr}^{Q_1} &= (0.70, 0.13), \\ V_{ul}^{Q_2} &= (0.55, 0.13), & V_{ur}^{Q_2} &= (0.63, 0.13), \\ V_{ll}^{Q_2} &= (0.55, 0.07), & V_{lr}^{Q_2} &= (0.63, 0.07) \end{aligned}$$

csúcspontokkal vettük fel.

Az átfedéshez szükséges \mathcal{O}_L és \mathcal{O}_R régiókat az alábbi módon határoztuk meg, melyek esetén szintén figyelembe vettük az instabil sokaság alakját. A $(-l)$ -dik képnél a felső és alsó oldalak elhelyezkedéséhez szükséges régiók az

$$\mathcal{O}_L = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0.25\}, \text{ illetve az } \mathcal{O}_R = \{(x_1, x_2) \mid x_2 < 0.07\}.$$

A k -dik kép esetén a négyszög jobb, illetve bal oldalainak elhelyezkedéséhez szükséges régiók:

$$\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L^1 \cup \mathcal{O}_L^2, \text{ illetve } \mathcal{O}_R = \mathcal{O}_R^1 \cap \mathcal{O}_R^2,$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_L^1 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0.70, x_1 + x_2 > 0.83\}, \\ \mathcal{O}_L^2 &= \{(x_1, x_2) \mid (0.25/1.1) x_1 - x_2 < 0.25\}, \\ \mathcal{O}_R^1 &= \{(x_1, x_2) \mid (0.25/1.1) x_1 - x_2 > 0.25, x_1 + x_2 < 0.68\}, \\ \text{és } \mathcal{O}_R^2 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0.63\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_2 < 0.07\}. \end{aligned}$$

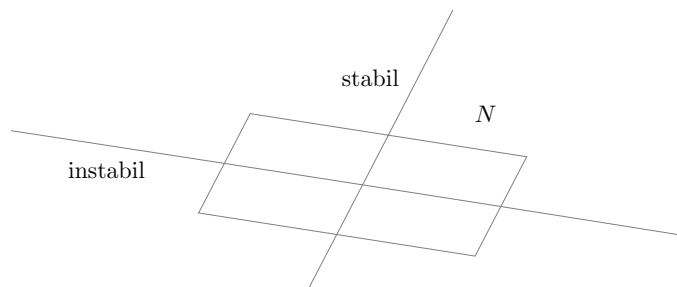
Az előzetes próbálkozások után a $k = 10$ és az $l = -2$ esettel kísérleteztünk. A keresésünk sikeres volt, és μ -re és ν -re a 0.005 és a 0.0125 értékek megfelelőek, melyekkel a

$$V_{ul}^N = (0.621310, 0.195769), \quad V_{ur}^N = (0.646011, 0.191917),$$

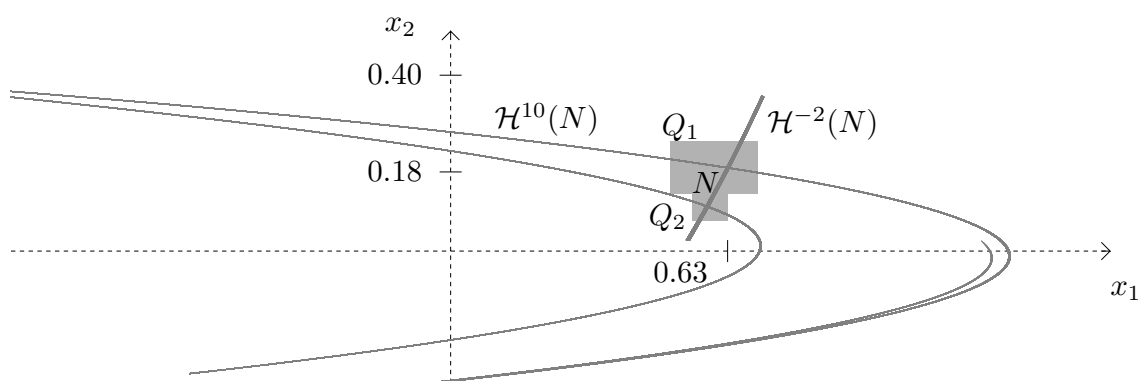
$$V_{ll}^N = (0.616698, 0.186896), \quad V_{lr}^N = (0.641399, 0.183044)$$

négyszöget kaptuk (lásd a 2.18. ábrán).

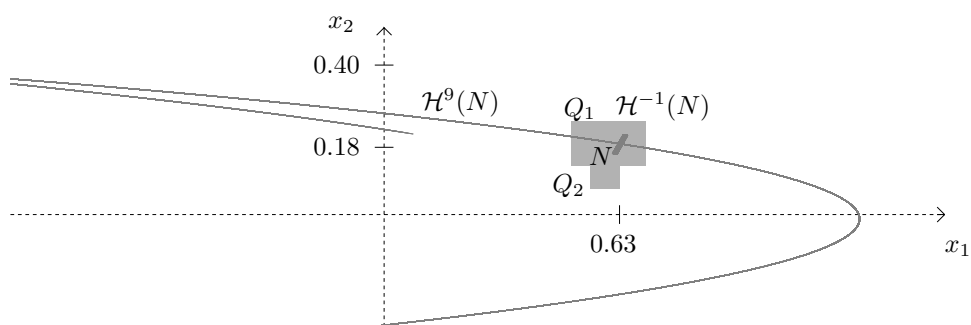
Ezzel bizonyítottuk, hogy az Hénon-leképezés 12-dik iteráltja után mindegyik rendelkezik L - R típusú káosszal. Így már csak a 9-dikre és a 11-dikre kell ezt megmutatni. Ezekre sikeres volt a korábban említett általános kereső eljárás. Ezzel bizonyítottuk, hogy az Hénon-leképezés összes szóba jöhető iteráltja rendelkezik L - R típusú káosszal.



(a) A megfelelő síkidom valamint a stabil és instabil sokaság elhelyezkedése.



(b) A megfelelő síkidom \mathcal{H}^{10} és \mathcal{H}^{-2} melletti képei.



(c) A megfelelő síkidom \mathcal{H}^9 és \mathcal{H}^{-1} melletti képei.

2.18. ábra. A Smale bizonyításának megfelelő négyszögek és ezek képei.

3. fejezet

A kényszererős fékezett inga kaotikus viselkedése és stabilizálása

Több közlemény is foglalkozik valószínűleg nem mondható dinamikai rendszerek kaotikusságával. Ezen a területen való rendszerek kaotikusságának matematikai bizonyítójú tárgyalása nagyon ritka, azonban számos rendszerről sejthető a kaotikus viselkedés. Jelen fejezetben is egy ilyen sejtés számítógéppel segített matematikai bizonyítását fogjuk megadni. J. Hubbard egy egyszerűnek tűnő kényszererős fékezett ingáról állítja, hogy kaotikus [34, 35], de matematikai bizonyítást nem ad annak létezésére. Ezen dinamikai rendszer érdekessége, hogy a kaotikus viselkedést köznap szavakkal, matematikai fogalmak nélkül is meg lehet fogalmazni. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy az alsó ponton való áthaladás jellegével is le lehet írni ezt a viselkedést, mely így egy szabad szemmel is tapasztalható jelenség.

A fejezet első felében bemutatjuk egy a kaotikus viselkedéshez szükséges, de nem elégséges állítás számítógépes bizonyítását. Az ehhez tartozó numerikus eredmények és az állítás megtalálható a SCAN konferencia különnkiadványában [19]. Majd Hubbard ötletét követve egy teljes bizonyítást adunk [12] az ismertett inga kaotikus tulajdonságára, melyről egy összefoglaló dolgozatot is elkészítettünk [13]. A fejezet további részében egy olyan technikát mutatunk be, mellyel képes voltam stabilizálni az inga instabil állapotát.

Jelen fejezetben tárgyalt probléma vizsgálatát Hatvani László kezdeményezte. Ekkor már ismert volt az Hénon-leképezés kaotikusságára kifejlesztett technikánk. Így ezen probléma bizonyítására szolgáló eljárás sikertelenségét csak a megbízható differenciálegyenletet megoldó szubrutin túlbecslései okozhatták volna. Ennek a vizsgálatára készítettem el a kaotikusság megállapításához szükséges tétel bizonyítására szolgáló programot (3.1.2-es és 3.1.4-es fejezetek). Garay Barna ötlete alapján megvizsgáltuk a fixpontok viselkedését is, melyek tulajdonságai a 3.1.3-as fejezetben találhatók. Az ehhez használt karakterisztikus multiplikátor módszerrel ő ismertetett meg. Majd ezen eredmények után megkonstruáltam a káosz bizonyításhoz szükséges algoritmust (3.1.2 – 3.1.4-es fejezetek). Ezt követően Hatvani László ötlete alapján kezdtem el foglalkozni a kontroll problémájával. Az általa javasolt szakirodalom feldolgozása után – melyet a 3.3.1-es fejezetben közlünk – körvonalázódott bennem egy módszer az instabil fixpont stabilizálásra. Ezt az ötletemet fejti ki a 3.3.2-es fejezet, mely helyességéhez a multiplikátor módszert alkalmaztam.

3.1. A kaotikusság irányában

3.1.1. A kényszererős fékezett inga

Jelen fejezetben egy kényszererős fékezett ingát vizsgálunk, mely egy 1 szabadsági fokkal rendelkező mechanikai rendszer. Egy m tömegű pontszerű test lóg egy l hosszú súlytalan, merev rúdon (lásd a 3.1. ábrán). Ez azt jelenti, hogy a pontszerű test egy kör mentén mozoghat, melynek sugara l . A vizsgált ingára három erő hat. Az egyik a gravitáció, amelynek nagysága g és függőlegesen lefelé hat. A másik a légellenállás, amelynek nagysága a test sebességétől függ, és iránya ellentétes a pontszerű test mozgásának irányával. A forgási sebesség és ezen erő hányadosa legyen konstans, és jelöljük ezt $(-\gamma)$ -val, ahol $\gamma > 0$. A harmadik egy periodikus külső erő, amely hat az inga sebességére az inga minden pozíciójában. Ez a kényszererő legyen $A \cos t$, ahol A egy konstans és t az idő. Ekkor a rendszer felírható egy másodrendű differenciálegyenlettel:

$$mlx''(t) = -mg \sin x(t) - \gamma l x'(t) + A \cos t,$$

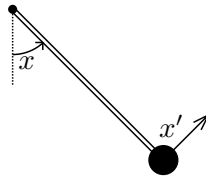
ahol x az inga függőlegessel bezárt szöge, és x' az inga forgási sebessége. A tömeget egységnyinek választva és az inga hosszával (l) leosztva az előző egyenletet az alábbi egyenlethez jutunk:

$$x''(t) = -\frac{g}{l} \sin x(t) - \gamma x'(t) + \frac{A}{l} \cos t.$$

A további szabad paraméterek megválaszthatóak úgy ($g = l$ és $A = l$), hogy az alábbi egyenletet kapjuk:

$$x''(t) = -\sin x(t) - 0.1x'(t) + \cos t.$$

Ez az egyenlet fogja vizsgálataink tárgyát képezni. Korábbi, a kapcsolódó irodalombeli eredményekből tudható, hogy az ilyen rendszerek numerikus megoldásai nagyon érzékenyek néhány pont közelében [16].



3.1. ábra. A kényszererős fékezett inga.

A fenti egyenletet felírhatjuk az alábbi formában is:

$$x_1'(t) = x_2(t),$$

$$x_2'(t) = -0.1x_2(t) - \sin x_1(t) + \cos t,$$

ahol x_1 az inga szöge, míg x_2 az inga szögsebessége.

A káosz bizonyításához egyik eszköz a Poincaré-leképezés. Mivel a kényszererő 2π periodikus, így a Poincaré-képeket a $t = 2n\pi$ időpillanatokban vesszük, ahol n egy egész szám. Az ezen időpillanatok között kialakult leképezések azonosak. Így a trajektória követéséhez elegendő a Poincaré-leképezést $(\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2)$ iterálni, melyet az alábbi módon definiálhatunk:

$$\mathcal{P} : (x(0), x'(0)) \mapsto (x(2\pi), x'(2\pi)).$$

Megjegyzendő, hogy ez a Poincaré-leképezés x -ben 2π periodikus, mivel az inga szöge is 2π periodikus, és egyik erő sem függ a körbefordulások számától. De amíg a hagyományos inga szimmetrikus x -ben is, a mi rendszerünk nem az, mivel a kényszererő nem szimmetrikusan hat az inga szimmetrikus szögeiben.

3.1.2. Megbízható módszer a Poincaré-leképezés befoglalására

A káosz bizonyításához a Poincaré-leképezést is megbízható módon kell megadni. Mivel ez a leképezés nem írható fel zárt alakban, így egyetlen megoldás marad, a trajektória követése a $[0, 2\pi]$ időintervallumon. Egy adott pontra a Poincaré-leképezést a trajektória helyzete adja meg a $t = 2\pi$ időpillanatban.

Több megbízható differenciálegyenlet-rendszert megoldó szoftver létezik, melyek szabadon felhasználhatók [15]. A választásunk a könnyű használat, és a széleskörűen elismert teljesítménye miatt a VNODE-ra (Validated Numerical ODE) esett [67]. A csomag működése a Taylor-sorfejtésen alapul. Erőssége az, hogy a lépéshosszt automatikusan választja meg, és így ott végez kisebb lépéseket, ahol ez szükséges. Ezzel a módszerrel nagyobb pontosságot képes elérni. A csomag további előnye, hogy a trajektóriákat időben előre- és hátrafelé is tudja követni.

A program egyetlen hátránya számunkra, hogy csak számítógépen ábrázolható időpillanatokban képes megadni a trajektória helyzetét. A Poincaré-leképezésben szereplő 2π azonban nem ábrázolható számítógépen, így az alábbi átalakítással használjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= \pi, \\ y_1'(t) &= \pi(y_2(t)), \\ y_2'(t) &= \pi(-0.1y_2(t) - \sin y_1(t) + \cos t). \end{aligned}$$

Erre a módszerre a $t = 2$ időpillanatban kapjuk meg a Poincaré-leképezést. A Poincaré-leképezés inverzét pedig a $t = -2$ időpillanatban. Ezen két függvény értékét jelöljük az I 2 dimenziós intervallumra $P(I)$ -vel és $P^{-1}(I)$ -vel.

3.1.3. A periodikus pontok

A kaotikus viselkedésben fontos szerepet játszanak a periodikus pontok. Ezek helyének és stabilitásának vizsgálata szükséges a káosz bizonyításához. Korábbi eredményekből tudható [49], hogy ilyen rendszereknek legalább egy periodikus megoldása van, de ennél többre lesz szükségünk.

Jelen részben csak a Poincaré-leképezés fixpontjaival foglalkozunk, ugyanis léteznek olyan periodikus pontjai az ingának, melyek 2π időközönként ugyanazt az állapotot veszik fel, de közben legalább egyszer körbefordulnak. Sejtethető, hogy egy bizonyos értéknél nagyobb sebességgel mozgó inga nem lehet periodikus. Durva számításokkal az alábbi felső korlátot kapjuk a kaotikus inga sebességére:

$$|x_2| < \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) e^{0.1t} dt < 10.1.$$

A periodikus pontok kereséséhez egy egyszerű megbízható B&B eljárást alkalmaztunk. A keresési terület az

$$(x, x') \in [0, 2\pi] \times [-10.1, 10.1]$$

kezdő intervallum volt. A B&B eljárásunk olyan 2 dimenziós intervallumokat (I_i) generál a kezdő intervallumból, melyekre igaz az alábbi állítások valamelyike:

1. az I_i intervallumnak nincs közös pontja a $P(I_i)$ és $P^{-1}(I_i)$ legalább egyikével, vagy
2. az I_i intervallum kicsi (a felhasználó által beállított méretű), és van közös pontja a $P(I_i)$ -vel és a $P^{-1}(I_i)$ -vel is.

A periodikus pontok csak a második halmazban lehetnek. Következő lépésként az ezen csoportban lévő közös ponttal rendelkező intervallumokat összevonjuk egy nagyobb intervallumba, amely tartalmazza mindkét kisebb intervallumot. Ezt mindaddig csináljuk, míg van ilyen intervallum a csoportban. Ezzel feltehetően pontosan annyi intervallumot kapunk, mint ahány periodikus pontja van a rendszernek, és mindegyiknek egy-egy garantált befoglalását nyerjük. Sajnos ez a technika egyelőre nem zárja ki, hogy egy-egy „dobozban” több vagy akár egy periodikus pont se szerepeljen.

Esetünkben ezen 2 dimenziós intervallumok az alábbiaknak adódtak:

$$(x, x')_1 = ([2.634272, 2.634274], [0.02604294, 0.02604485]),$$

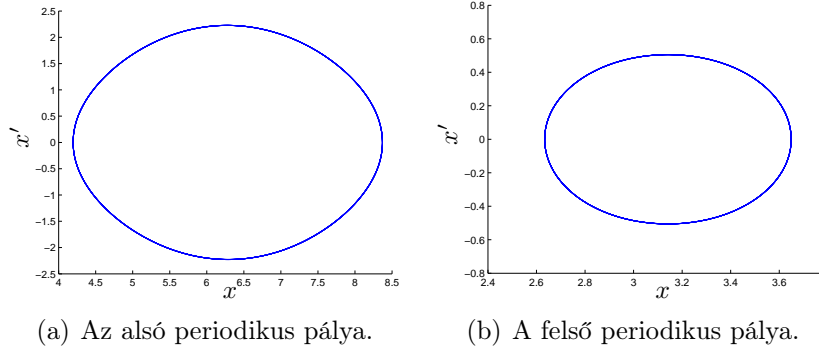
$$(x, x')_2 = ([4.236893, 4.236894], [0.3926964, 0.3926973]).$$

Megvizsgálva a trajektóriákat, azt sejtjük, hogy az első egy felső egyensúlyi pályát, míg a második egy alsó egyensúlyi pályát feltételez (lásd a 3.2. ábrát).

A létezés és az egyértelműség igazolásához a karakterisztikus multiplikátort fogjuk használni. Ezt az úgynevezett variációs egyenlet módszerrel határozzuk meg. Ehhez szükségünk van a jobboldalak x_1 és x_2 szerinti deriváltjaira, melyek a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy az x'_2 -nek az x_1 szerinti deriváltja tartalmazza az x_1 -et, így szükségünk van a megoldásra is, melyet csak numerikusan befoglalva tudunk meg-



3.2. ábra. A periodikus pályák.

adni. Így az alábbi differenciálegyenlet-rendszert vizsgáljuk:

$$\begin{aligned}
 z_1'(t) &= z_2(t), \\
 z_2'(t) &= -0.1z_2(t) - \sin z_1(t) + \cos t, \\
 z_3'(t) &= z_4(t), \\
 z_4'(t) &= -0.1z_4(t) - z_3(t) \cos z_1(t).
 \end{aligned}$$

A z_1 és z_2 teljesen azonos az x_1 -gyel, illetve x_2 -vel, és ezek fogják a megoldást minden időpillanatra kiszámolni, míg a z_3 és z_4 a multiplikátorokat tartalmazzák.

Az eljárás során a differenciálegyenlet z_1, z_2 kezdőértékei legyenek az első fixpont koordinátái, valamint $z_3(0) := 1$ és $z_4(0) := 0$. Ezekkel az értékekkel kiszámolt Poincaré-leképezés z_3 és z_4 értékei legyenek egy A_1 2×2 -es mátrix első oszlopa. Az A_1 mátrix második oszlopát hasonlóan számoljuk ki, csak a $z_3(0) := 0$ és $z_4(0) := 1$. Az így adódó mátrix:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [169.6369, 169.6370] & [168.7925, 168.7926] \\ [152.9595, 152.9597] & [152.2012, 152.2014] \end{pmatrix},$$

melynek sajátértékeinek befoglalása:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^1 &= [321.8363, 321.8368], \\
 \alpha_1^2 &= [0.001421, 0.001894].
 \end{aligned}$$

Mivel abszolút értékben az egyik nagyobb, mint 1, a másik pedig kisebb, ezért az $(x, x')_1$ intervallum pontosan 1 instabil fixpontot tartalmazhat.

Hasonlóan a másik intervallumra:

$$A_2 = \begin{pmatrix} [-0.7426217, -0.7426218] & [0.09101517, 0.09101522] \\ [-0.04890921, -0.04890920] & [-0.7123905, -0.7123904] \end{pmatrix},$$

melynek sajátértékei

$$\begin{aligned}
 \alpha_2^1 &= [-0.7275062, -0.7275061] + \sqrt{[-0.01689209, -0.01689190]}, \\
 \alpha_2^2 &= [-0.7275062, -0.7275061] - \sqrt{[-0.01689209, -0.01689190]}.
 \end{aligned}$$

Mivel a valós rész abszolút értéke mindkét esetben kisebb mint 1, így ez egy stabil fixpontot tartalmaz.

3.1.4. A káosz létezésének szükséges feltétele

Definiáljunk egy N négyszöget az (x, x') térben. Ez a négyszög tartalmazza a megismert instabil fixpontot. Legyen ezen négyszög a stabil sokaság irányában keskeny és az instabil sokaság irányában pedig hosszú. Ezen N téglalap $2k\pi$ -szeres x tengely irányába való eltolásaival kapott négyszögeket jelöljük N_k -val. A kaotikus viselkedés bizonyítása előtt annak egy következményét próbáljuk bizonyítani.

A rendszer kaotikus viselkedését a következő tétel jellemzi:

3.1. Tétel. *Tekintsünk egy tetszőleges, mindkét irányban végtelen hosszú $i_j \in \mathbb{Z}$ sorozatot, melyre minden j -re igaz, hogy $|i_j - i_{j+1}| \leq 1$. Ha az ingának létezik olyan (x, x') kezdőállapota, hogy az inga állapota a $2j\pi$ időpillanatban eleme az N_{i_j} négyszögnek, akkor a rendszer kaotikus.*

Most bizonyítsuk ezen tétel egy következményét:

3.2. Állítás. *Az összes N_-, N_0, N_+ ($N_-, N_+ \in \{N_{-1}, N_0, N_1\}$) háromhosszú sorozathoz létezik az ingának olyan $(x, x') \in N_0$ kezdőállapota, hogy $P^{-1}(x, x') \in N_-$ és $P(x, x') \in N_+$.*

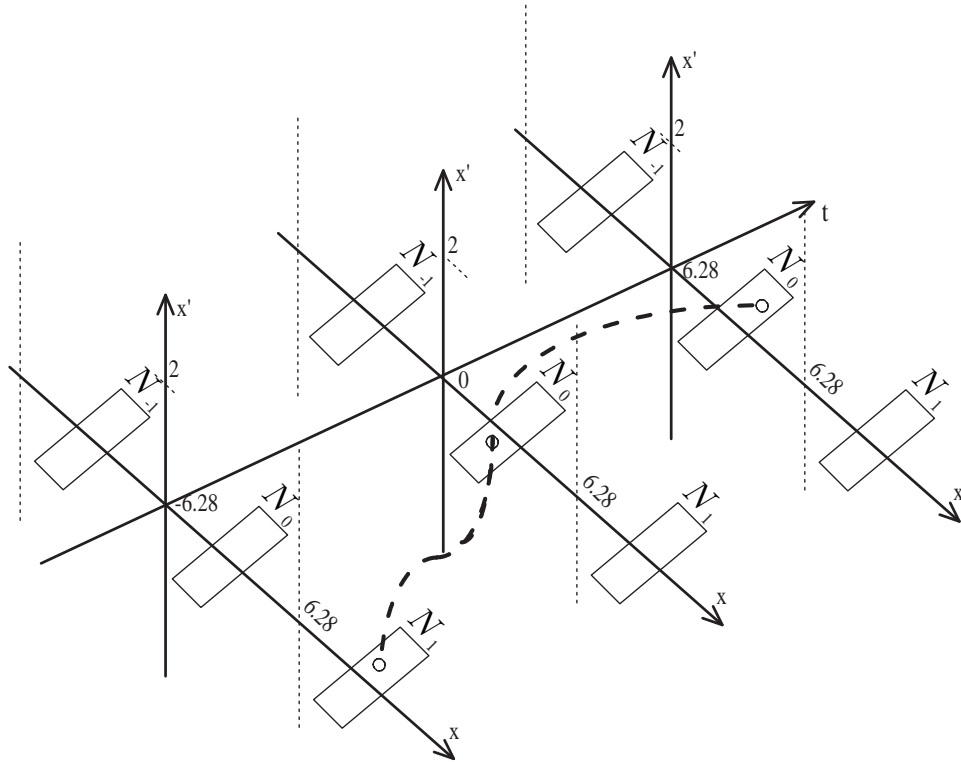
Az állításban szereplő háromhosszú sorozat egy részsorozata a fenti tételben szereplő végtelen hosszú sorozatnak. Továbbá, csak azt a tulajdonságát használtuk ki, hogy az inga szöge 2π periodikus, így a középső elemet nyugodtan vehetjük az N_0 négyszögnek. Ezekkel az észrevételekkel már megmutattuk, hogy az utóbbi állítás egy szükséges, de nem elegendő feltétele a tételben szereplő kaotikus viselkedésnek. Egy az állításban szereplő, lehetséges N_1, N_0, N_0 sorozathoz tartozó trajektóriát illeszttrálunk a 3.3. ábrán.

Az állítás bizonyításához elegendő az összes lehetséges háromhosszú sorozathoz mutatni egy-egy olyan pontot melyre igaz, hogy a Poincaré-képei az előírt négyszögekbe esnek. Minden egyes keresés során egy B&B eljárást fogunk alkalmazni. A kereső algoritmus (a 3. Algoritmus) végrehajtása során akkor dobunk el egy intervallumot, ha valamely képének nincs közös pontja az elvárt célterülettel. Ha egy intervallumra igaz mind a 3 tartalmazás, akkor az intervallum bármely pontja megfelel az adott sorozatnak. Ilyen háromhosszú sorozatból összesen 9 létezik, azaz a kereső eljárást ennyiszor futtatjuk a megfelelő célterületekkel. A 3.1. táblázatban a 9 keresés eredményét, illetve a 3.4. ábrán az N_1, N_0, N_0 sorozathoz tartozó megoldás trajektóriájának garantált befoglalását adtuk meg.

Ezzel a típusú eljárással csak véges hosszú részsorozatra tudjuk belátni, hogy létezik hozzá pont, mely az adott sorozatot „követi”. A kaotikussághoz azonban végtelen hosszú sorozatokra kell ezt belátni, így ezen módszer nem alkalmas a káosz teljes bizonyítására. Azaz a káosz bizonyításához vissza fogunk nyúlni az Hénon-leképezésnél megismert technikákhoz.

Cél- terület	P^{-1} melletti / eredeti / P melletti intervallum (x , x' koordinátái)		CPU idő (s)	Int-ok száma
N_0	[2.317648, 2.709306]	[−0.050055, 0.342587]	383	1 390
N_0	[2.628677, 2.629443]	[0.021484, 0.021973]		
N_0	[1.076006, 1.253059]	[−1.048104, −0.964307]		
N_1	[7.632088, 7.660986]	[−0.512440, −0.483095]	363	1 615
N_0	[2.696904, 2.698438]	[−0.047852, −0.046875]		
N_0	[0.990481, 1.369249]	[−1.100671, −0.899117]		
N_{-1}	[−2.894219, −2.710906]	[1.155728, 1.233331]	402	1 595
N_0	[2.607979, 2.609512]	[0.041992, 0.042969]		
N_0	[1.028439, 1.405768]	[−1.086193, −0.880000]		
N_0	[2.284252, 2.669446]	[−0.003131, 0.381040]	694	3 178
N_0	[3.751748, 3.752515]	[1.072266, 1.072754]		
N_1	[7.173756, 7.188131]	[−1.052968, −1.048956]		
N_1	[7.556686, 7.831820]	[−0.896126, −0.595137]	356	1 364
N_0	[3.875938, 3.888203]	[1.062500, 1.070313]		
N_1	[7.265608, 7.524591]	[−1.042681, −0.922727]		
N_{-1}	[−2.811017, −2.345166]	[1.059322, 1.274043]	561	2 292
N_0	[3.719551, 3.722617]	[1.078125, 1.080078]		
N_1	[7.186581, 7.247708]	[−1.049464, −1.030382]		
N_0	[2.342858, 2.729911]	[−0.079739, 0.311653]	1 001	5 258
N_0	[1.421279, 1.422046]	[−0.881836, −0.880859]		
N_{-1}	[−1.755311, −1.745855]	[1.595219, 1.602129]		
N_1	[7.704982, 8.076489]	[−0.812236, −0.355093]	384	1 462
N_0	[1.520938, 1.533203]	[−0.968750, −0.953125]		
N_{-1}	[−2.091369, −1.911043]	[1.343996, 1.492038]		
N_{-1}	[−2.798045, −2.243367]	[0.960221, 1.221012]	652	2 853
N_0	[1.404414, 1.410547]	[−0.847656, −0.843750]		
N_{-1}	[−1.877814, −1.815990]	[1.502639, 1.548777]		

3.1. táblázat. A 3.2. Állítás bizonyításához szükséges intervallumok, az azok megtaláláshoz szükséges CPU idő és a generált intervallumok száma.



3.3. ábra. Egy a N_1, N_0, N_0 sorozathoz tartozó trajektória illusztrálása.

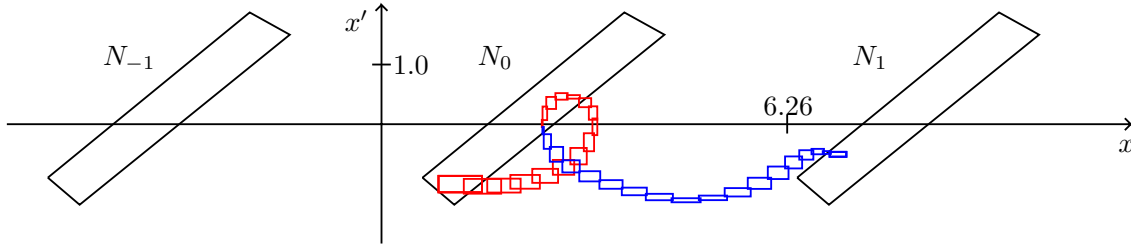
3.2. A káosz matematikai bizonyítása

3.2.1. J. Hubbard tétele a kaotikus viselkedésre

Hubbardnak, a tekintett inga kaotikusságára vonatkozó tételének ismertetése előtt vezessük be az alábbi jelöléseket:

- Jelöljük a $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ időintervallumot I_k -val.
- $\epsilon_{k \in \mathbb{Z}}$ egy szimbólum, melynek értékkészlete $\{-1, 0, 1\}$.
- – Ha az I_k időintervallumban az inga *az óra járásával megegyező irányban pontosan egyszer* haladt át az alsó ponton, akkor azt mondjuk, hogy az inga az $\epsilon_k = -1$ szerinti mozgást végezte.
- Ha az I_k időintervallumban az inga *nem* haladt át az alsó ponton, akkor azt mondjuk, hogy az inga az $\epsilon_k = 0$ szerinti mozgást végezte.
- Ha az I_k időintervallumban az inga *az óra járásával ellentétes irányban pontosan egyszer* haladt át az alsó ponton, akkor azt mondjuk, hogy az inga az $\epsilon_k = 1$ szerinti mozgást végezte.

Megjegyzendő, hogy az alsó pont alatt azt értjük, hogy az inga szöge egyenlő $2k\pi$ -vel, valamilyen egész k -ra. Ekkor az inga nincs egyensúlyban, mint ahogy ez a korábbi eredményeinkből látható. Azt is érdemes megjegyezni, hogy az ϵ_k szerinti mozgáson



3.4. ábra. Az N_1, N_0, N_0 sorozathoz tartozó megoldás trajektóriájának garantált befoglalása.

kívül léteznek egyéb típusú mozgások is. Például az I_k időintervallum alatt többször is átmegy az alsó ponton. Most az ilyen típusú mozgásokat figyelmen kívül hagyjuk, a kaotikus viselkedést csak e három típust tartalmazó trajektóriákra mondjuk ki.

3.3. Tétel (Hubbard). *Az összes, mindkét irányban végtelen hosszú $\epsilon_k \in \{-1, 0, 1\}$ -val megadott sorozathoz létezik olyan $(x(0), x'(0))$ kezdőérték, amelyre az inga az I_k időintervallumok alatt az ϵ_k szerinti mozgást végzi.*

Ez azt jelenti, hogy tetszőlegesen előírhatjuk azt, hogy az inga az egymás utáni 2π hosszú időintervallumok alatt melyik irányba haladjon át az alsó ponton, vagy azt, hogy ne haladjon át az adott idő alatt ezen a ponton. Például előírhatjuk azt a sorozatot, mely szerint a $[0, 2\pi]$ idő alatt balra, míg a $[2\pi, 4\pi]$ idő alatt jobbra, majd a $[4\pi, 6\pi]$ idő alatt ne haladjon át, és végül a $[8\pi, 10\pi]$ idő alatt megint jobbra haladjon át az alsó ponton. A tétel szerint ezt a sorozatot tetszőlegesen folytatva is létezik az ingának olyan kezdeti szöge és sebessége, melyből elindítva az előírt sorozatot írja le.

Hubbard a cikkében [34] kimondta a tételt, de egzakt matematikai bizonyítást nem tudott adni rá, habár a bizonyítás egy lehetséges menetét leírta. A következőkben ez alapján adunk bizonyítást.

3.2.2. A bizonyítás menete

A kaotikusságot bizonyító patkók keresése csak a Poincaré-metszeteken alkalmazható. Jelen esetben ezen Poincaré-metszetek az inga szöge és sebessége terében vannak. Azaz az itt létrejövő területek, melyek mutatják a patkó létezését, szögsebesség párokból álló halmazok. Ezen halmazok tetszőleges bejárására ad egzakt bizonyítást a patkók létezése. Jelen esetben egy teljes L - M - R típusú UG patkót fogunk keresni. A patkót mutató halmazokat rendre L , M és R szimbólumokkal fogjuk jelölni, és ezt a teret szimbolikus térnek fogjuk nevezni. Ha a Poincaré-metszeteken sikerül bizonyítani a patkó létezését, akkor már tudjuk, hogy a rendszer kaotikus, de a tétel ennél erősebbet állít. A tételben szereplő események a két Poincaré-metszet között bekövetkezett ingamozgásokat írják elő. Így a következő lépésben meg fogjuk mutatni, hogy a kaotikus pontok ilyen típusú mozgásokat fognak végrehajtani a 2π hosszú idő alatt. Azaz a bizonyításunk a következő két részből fog állni:

3. Algoritmus. Az adott sorozathoz tartozó kiindulási intervallum keresése.

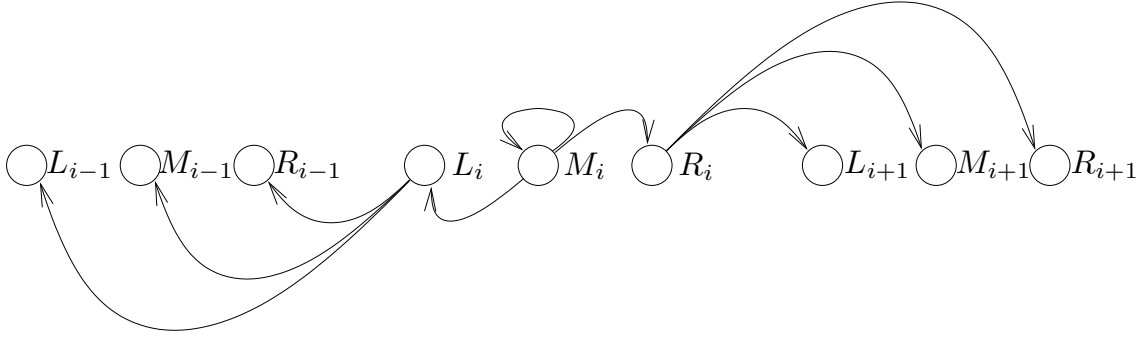
Input: – ϵ : a részintervallumok felhasználó által beállított minimális mérete,
 – N_0 : a tekintett halmaz,
 – N_-, N_+ : az aktuális célhalmazok.
Output: – egy intervallum, amely megfelel az adott sorozathoz, vagy
 – nem talál ϵ -nál nagyobb intervallumot, amely megfelelne.

1. lépés Számoljuk ki a kezdő intervallumot.
 2. lépés Tegyük be ezt az intervallumot a verembe.
 3. lépés Vegyünk ki egy v intervallumot a veremből.
 4. lépés Határozzuk meg a v intervallum legszélesebb oldalát.
 5. lépés Számoljuk ki a transzformált $w_- = P^{-1}(v)$ és $w_+ = P(v)$ intervallumokat.
 6. lépés Ha a $v \subset N_0, w_- \subset N_-$ és $w_+ \subset N_+$, akkor
 a keresés sikeres volt, írjuk ki v -t és STOP,
 egyébként,
 ha a v intervallum szélesebb oldala nagyobb, mint a felhasználó által adott
 érték, $v \cap N_0 \neq \emptyset, w_- \cap N_- \neq \emptyset$ és $w_+ \cap N_+ \neq \emptyset$, akkor vágjuk ketté v -t a
 szélesebb oldala mentén, rakjuk be a két részintervallumot a verembe és
 folytassuk a 3. lépéssel.
 7. lépés Ha a verem üres, akkor a keresés nem sikerült és STOP, egyébként foly-
 tassuk a 3. lépéssel.
-

1. Az (x, x') szimbolikus térben mutatunk olyan L, M és R halmazokat, amelyekre bizonyíthatjuk a káosz létét, azaz tetszőleges $\{Q_{\gamma_k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (ahol $\gamma_k \in \{-1, 0, 1\}$ és $Q_{-1} = L, Q_0 = M, Q_1 = R$) sorozathoz mutatunk egy pontot a szimbolikus térben, melynek a trajektóriája épp az adott sorozatot járja be.
2. Megmutatjuk, hogy az (x, x') szimbolikus térben kimutatott káosz ekvivalens az ingán definiált káosszal, azaz az L, M, R szimbólumok rendre ekvivalensek az $\epsilon_k = -1, \epsilon_k = 0, \epsilon_k = 1$ típusú mozgással.

Bár, eddig egyetlen L, M , illetve R halmazról beszéltünk, de tulajdonképpen végtelen sok van belőlük, ugyanis az inga szöge 2π szerint periodikus. Jelöljük ezen halmazokat rendre L_i -vel, M_i -vel és R_i -vel. Mivel azt akarjuk belátni, hogy az L_i halmazból induló inga pontosan egyszer megy át az alsó ponton, így csak az L_{i-1}, M_{i-1} és R_{i-1} halmazokba mehet, és hasonlóan, az M_i halmazból az L_i, M_i és R_i -be, és az R_i -ből az L_{i+1}, M_{i+1} és R_{i+1} -be. Ezen átmenet gráf egy részletét láthatjuk a 3.5. ábrán.

Ebben a térben egy „igazi” patkó tulajdonképpen nem is alakul ki, mivel nem saját magukat fedik át, hanem a szomszédos hasonló régiókat. Azonban, ha csak magát az ingát tekintjük, akkor mégis kialakul a patkó szerkezet. Ez a gondolat szimbolikusan azt jelenti, hogy az eredeti síkbeli állapothalmazt egy végtelen magas henger palástjára képezzük le.



3.5. ábra. A kényszererős inga kaotikusságát leíró gráf egy részlete.

3.2.3. Káosz bizonyítása a szimbolikus térben

Az L_i , M_i és R_i halmazok helyzete periodikus, így elegendő ezek egyikére belátni, hogy átfedi a megfelelő L_j , M_j és R_j halmazokat. Legyenek ezek az L_0 , M_0 és R_0 halmazok, melyekre bizonyítjuk az átfedéseket. A bizonyítás során nem az $L_{\pm 1}$, $M_{\pm 1}$ és $R_{\pm 1}$ halmazokkal való átfedést fogjuk bizonyítani, hanem a Poincaré-metszetet fogjuk eltolni az x tengely mentén $\mp 2\pi$ -vel. Jelöljük a $+2\pi$ -vel eltolt Poincaré-leképezést P^+ -szal, és a -2π -vel eltoltat P^- -szal. Azt, hogy a leképezés ténylegesen az L_0 esetén az L_{-1} , M_{-1} és R_{-1} halmazokat fedi át, azt az L_0 oldalának a képeinek a megfelelő eltolásával fogjuk igazolni. Azaz, ha az L_0 jobb, illetve bal oldalainak a képét eltoljuk $+2\pi$ -vel és azok az L_0 , M_0 és R_0 átellenes oldalain vannak, akkor az eredeti képek az L_{-1} , M_{-1} és R_{-1} átellenes oldalain kell, hogy legyenek. Az M_i esetén hasonlóan bizonyítunk, ha nem toljuk el az oldalak képeit. Az R_i esetében pedig -2π -vel kell eltolni a jobb és bal oldalainak a képét, azaz a P^- leképezést kell használni a megfelelő átfedéshez.

Jelöljük az L_0 és M_0 közötti területet C_0^L -vel, az M_0 és R_0 közötti területet C_0^R -val. Ekkor az E halmaz tartalmazni fogja az L_0 , C_0^L , M_0 , C_0^R és R_0 felső és alsó oldalait, valamint egy-egy innen induló félegyenest függőlegesen fel és le. Az E halmaztól balra, illetve jobbra eső régiók legyenek az \mathcal{O}_L és \mathcal{O}_R halmazok, melyeknek jobb, illetve bal szélei 2π távolságra lesznek egymástól. Továbbá ne legyen ezeknek közös pontja az E halmazzal, valamint az L_0 , C_0^L , M_0 , C_0^R és R_0 halmazokkal.

Ezek után a helyesen megválasztott \mathcal{O}_L , \mathcal{O}_R és E halmazokra az alábbi halmazelméleti tulajdonságoknak kell teljesülnie:

$$P^+(b) \cup P(c) \cup P^-(e) \subset \mathcal{O}_L, \quad (3.1)$$

$$P^+(a) \cup P(d) \cup P^-(f) \subset \mathcal{O}_R, \quad (3.2)$$

$$P^+(L_0) \cup P(M_0) \cup P^-(R_0) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus E), \quad (3.3)$$

ahol a, \dots, f rendre az L_0 , M_0 és R_0 halmazok bal és jobb oldalai.

A (3.1-3.3) feltételek igazolására az eltolások szerint három-három B&B eljárást fogunk alkalmazni.

3.2.4. Az inga mozgásának bizonyítása

Az előző feltételek már garantálják, hogy L_0 és R_0 esetében az áthaladások száma páratlan, és M_0 esetében páros. Például L_0 esetében az L_{-1} , M_{-1} és R_{-1} valamelyikébe került a trajektória, így egyszer biztosan áthaladt az alsó ponton a megfelelő irányban. Ha további áthaladások is bekövetkeztek volna, akkor egy ellentétes irányú áthaladásnak is lennie kellene, mivel csak ekkor kerülhet a trajektória a megfelelő halmazba. Azaz elegendő azt bizonyítani, hogy ilyen ellentétes áthaladások nem történtek. Így a trajektória bármely pontjára az alábbi feltételeknek nem szabad teljesülnie:

1. ha $x = -2(k-1)\pi$, akkor $x' \geq 0$;
2. ha $x = 2k\pi$, akkor $x' \leq 0$

az összes $k \in \mathbb{N}^+$ -ra. Mivel két átfordulásra nincs szükségünk, ezért a trajektória összes pontjára az alábbi feltételeknek kell teljesülni:

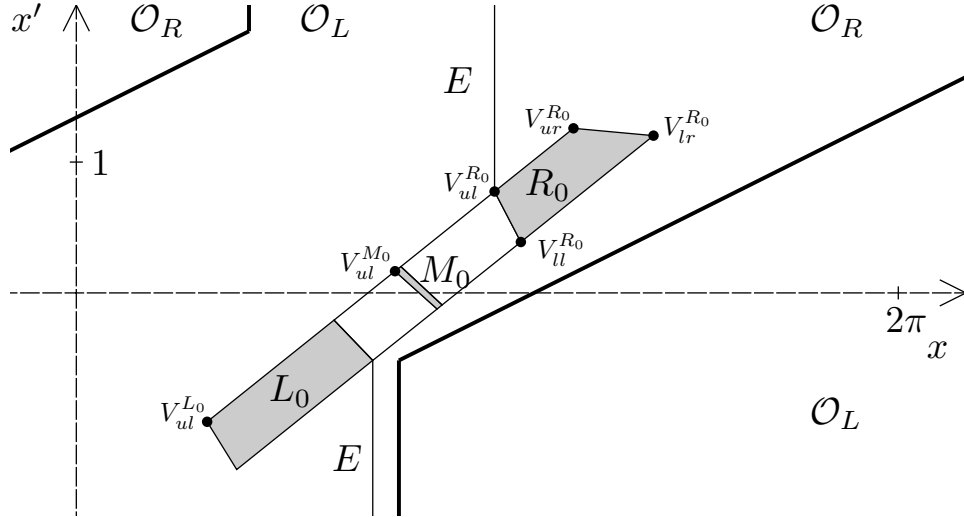
1. ha $x = 0$, akkor $x' < 0$;
2. ha $x = 2\pi$, akkor $x' > 0$;
3. $x \neq 4\pi$;
4. $x \neq -2\pi$.

A bizonyítás során szeretnénk minél könnyebben leírható L , M és R halmazt tekinteni, így egyszerű négyszögekkel fogunk próbálkozni. Ekkor előfordulhat, hogy a bővebb halmazokra már nem lesz igaz az, hogy az L halmazból induló trajektóriák pontosan egyszer haladnak át az alsó ponton, és hasonlóan a többire sem. Számunkra viszont csak azok a pontok érdekesek, amelyek benne vannak a kaotikus halmazban, így elegendő csak azokat a trajektóriákat vizsgálni, amelyek a 2π időpillanatban az L , M és R halmazok valamelyikében vannak. Ezzel az ötlettel tulajdonképpen egy alkalmas szűrést végzünk a megfelelő halmazokon. Ezek után már egy B&B eljárás alkalmazása elegendő lehet a bizonyításhoz.

3.2.5. A bizonyítás futási eredményei és a megfelelő halmazok

Néhány kísérlet után az alábbi négyszögekkel sikerült bizonyítani Hubbard tételét (lásd a 3.6. ábrát):

$$\begin{aligned}
 V_{ul}^{L_0} &= (1.000, -0.985), & V_{ur}^{L_0} &= (1.970, -0.208), \\
 V_{ll}^{L_0} &= (1.226, -1.350), & V_{lr}^{L_0} &= (2.266, -0.516), \\
 V_{ul}^{C_0^L} &= (1.970, -0.208), & V_{ur}^{C_0^L} &= (2.436, 0.166), \\
 V_{ll}^{C_0^L} &= (2.266, -0.516), & V_{lr}^{C_0^L} &= (2.758, -0.123), \\
 V_{ul}^{M_0} &= (2.436, 0.166), & V_{ur}^{M_0} &= (2.481, 0.201), \\
 V_{ll}^{M_0} &= (2.758, -0.123), & V_{lr}^{M_0} &= (2.796, -0.092),
 \end{aligned}$$



3.6. ábra. A káosz bizonyításának megfelelő halmazok.

$$\begin{aligned}
 V_{ul}^{C^R} &= (2.481, 0.201), & V_{ur}^{C^R} &= (3.197, 0.775), \\
 V_{ll}^{C^R} &= (2.796, -0.092), & V_{lr}^{C^R} &= (3.398, 0.389), \\
 V_{ul}^{R_0} &= (3.197, 0.775), & V_{ur}^{R_0} &= (3.800, 1.258), \\
 V_{ll}^{R_0} &= (3.398, 0.389), & V_{lr}^{R_0} &= (4.412, 1.202).
 \end{aligned}$$

A patkó létezésének a bizonyításához szükséges számítási idő közel fél órányi volt (lásd a 3.2. táblázatot). Ez a viszonylag hosszú ellenőrzési idő kizártta tette, hogy egy teljesen automatizált keresést alkalmazzunk, de az előzetes ismeretek alapján az nem is volt indokolt. Mint látható, ha egy valós rendszert szeretnénk vizsgálni, a káosz keresése nehéz és időigényes lehet. A 3.7. ábrán láthatóak az ellenőrzött intervallumok a (3.3) feltétel esetében (a három B&B eljárás összevont eredménye). Megfigyelhető, hogy az M halmazban nagyon sok kicsi intervallum található. Ez a régió tartalmazza az instabil fixpontot. Azaz, ha a hozzá tartozó 321-es értékű sajátértékből következő nyújtásra gondolunk, akkor nem is olyan meglepő, hogy ilyen sok kisméretű intervallum szükséges a bizonyításhoz.

A patkó létezése csak a kaotikusságot bizonyítja. A teljes bizonyításhoz az inga mozgására is bizonyítani kell az állításban szereplő mozgásokat. Az R , M és L régiók Poincaré-képei szerepelnek a 3.8. ábrán. Látható, hogy az M_i régió képe „átnyúlik” az $x = 0$ és az $x = 2\pi$ egyeneseken. Hasonlóan az L_i az $x = -2\pi$ -n és az $x = 0$ -án, valamint az R_i az $x = 2\pi$ -n és az $x = 4\pi$ -n. Így nem igaz például, hogy az összes M_i -ből induló trajektória nem megy át az alsó ponton. Így a trajektória mozgásának leírásához szükséges a régiók szűrése az alapján, hogy az eredmény intervallumnak van-e közös pontja a L_i , M_i és R_i régiók valamelyikével. Ez a szűrés nyilvánvalóan helyes, ugyanis a kaotikus állapotok között csak ilyen trajektóriák szerepelnek. Ezen megkötés mellett 1855 intervallum képének kiszámításával 90 másodperc alatt sikerült bizonyítani az inga mozgására kimondott állítást.

Feltétel	Adott halmaz	Intervallumok száma	CPU idő (másodperc)
(3.1)	b oldal	53	3
	c oldal	425	21
	e oldal	89	5
(3.2)	a oldal	49	3
	d oldal	543	24
	f oldal	137	8
(3.3)	L_0 négyszög	3 653	133
	M_0 négyszög	33 209	1 097
	R_0 négyszög	8 525	382

3.2. táblázat. A patkó létezésének bizonyításához szükséges CPU idők és a generált intervallumok száma.

3.3. Az instabil megoldás stabilizálása

3.3.1. Az egyszerű inga stabilizálása

Ismert az a tény, hogy az egyszerű inga felső egyensúlyi állapota instabil. Bizonyított [4], hogy a felfüggesztés megfelelő mozgatásával ezt stabillá lehet tenni. Egy ilyen eredményt érhetünk el a felfüggesztési pont adott periódusú és nagyságú függőleges irányú oszcilláló mozgatásával. Ennek a mozgásnak a gyorsulása legyen

$$\frac{8ap^2}{l} \sin(pt),$$

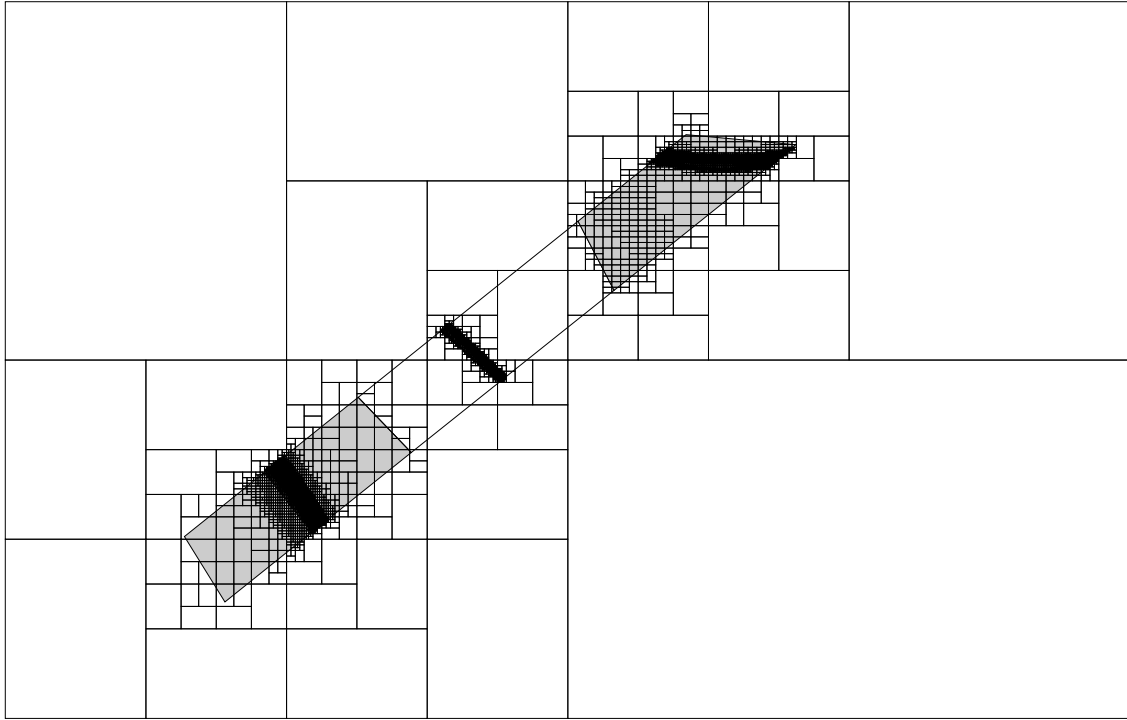
ahol a a kitérés amplitúdója, l az inga hossza, és p a kitérések száma 2π idő alatt. Ekkor a hagyományos inga differenciálegyenlete az alábbi formában írható fel:

$$x''(t) = \left(-\frac{g}{l} + \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) \sin x - \gamma x'.$$

A stabilitás vizsgálatához alkalmazhatjuk a korábban is használt variációs egyenlet módszerét. Jelen esetben ismert, hogy az ingának két fixpontja van, melyek közül az egyik stabil (az alsó egyensúlyi állapot), a másik pedig instabil (a felső egyensúlyi állapot). Vizsgálataink most a felső egyensúlyi állapotra koncentrálnak és ezt szeretnénk stabillá tenni. A fenti egyenlet periódusideje $\frac{2\pi}{p}$, azaz ilyen hosszan fogjuk vizsgálni a variációs egyenletrendszert. Ezen idő alatt a periodikus pálya ismert (konstans π), így nincs szükségünk a pálya kiszámítására. Ezen észrevételekkel az egyenletrendszer az alábbi módon adható meg:

$$\begin{aligned} z_3'(t) &= z_4(t), \\ z_4'(t) &= \left(-\frac{g}{l} + \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) z_3(t) - \gamma z_4(t). \end{aligned}$$

További vizsgálatainkban a kaotikus kényszererős fékezett ingához legjobban hasonlító rendszert vizsgáltuk, azaz $\gamma = 1$ és $l = g = 9.81$. Megvizsgáltuk, hogy milyen



3.7. ábra. Az ellenőrzött intervallumok.

gyorsan kell mozgatni a felfüggesztési pontot, ha azt szeretnénk, hogy a felső egyensúlyi állapot stabilizálódjon. Ehhez az kell, hogy teljesüljön az, hogy a fent említett differenciálegyenlet-rendszerrel kapott mátrix sajátértékeinek abszolút értékei 1-nél kisebbek legyenek. Konstans $a = 1$ és különböző p paraméterek mellett a 3.9. ábra jeleníti meg ezen értékeket.

3.3.2. A kényszererős fékezett inga stabilizálása

Az előző módszer analógiájára, a kaotikus kényszererős fékezett inga stabilizálásával próbálkozunk. Legyen a kényszererős fékezett inga felső instabil periodikus megoldásának a szöge az idő függvényében $\hat{x}(t)$. Az előző eredmények alapján sejtethető, hogy egy $\hat{x}(t)$ irányú és $\frac{8ap^2}{l} \sin(pt)$ értékkel gyorsuló felfüggesztési ponttal rendelkező kényszererős fékezett ingának stabilizálódik a felső instabil egyensúlyi pályája valamely a és p paraméterre. Ebben az esetben a középpont függőleges irányú gyorsulása:

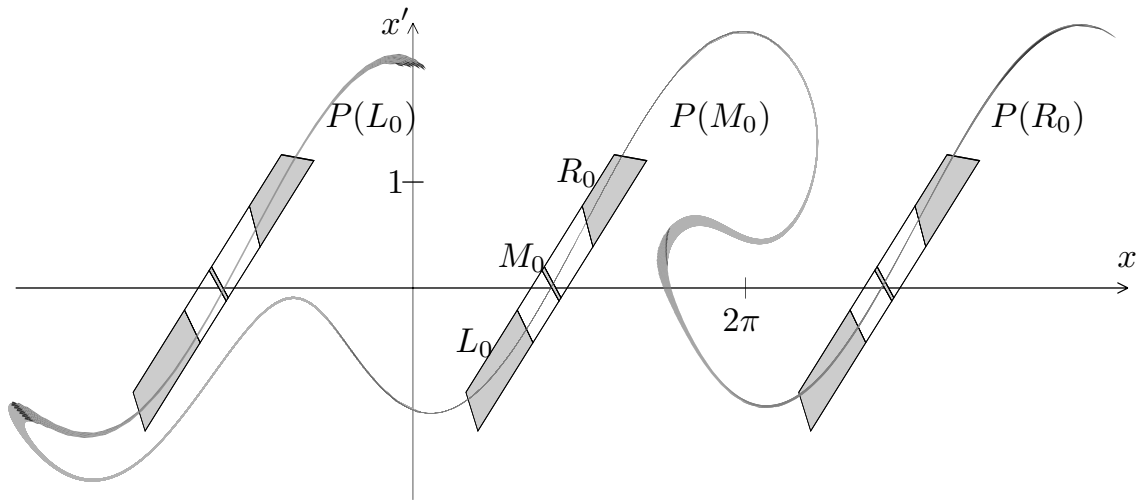
$$\cos(\hat{x}(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) = \omega_f,$$

a vízszintes irányú gyorsulása pedig:

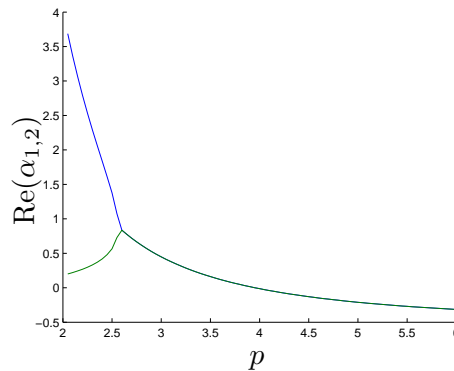
$$\sin(\hat{x}(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) = \omega_v.$$

Ekkor az alábbi formában írható fel a differenciálegyenlet:

$$x''(t) = (-1 - \omega_f) \sin(x) + \omega_v \cos(x(t)) - 0.1x' + \cos(t).$$



3.8. ábra. A kényszererős fékezett inga kaotikus tartományának Poincaré-képei.



3.9. ábra. Az sajátértékek valós részének abszolút értékének alakulása.

Az $a = 0.5$ és $p = 4$ paraméterekkel következett be egy stabilizálódás. Ezt mutatja a 3.10. ábra. A 3.10(a) ábrán az inga szögének alakulását láthatjuk az idő függvényében a felső instabil állapotban. A kontrollal ezt az állapotot szeretnénk stabilizálni. Egy közeli állapotból indított inga szögének alakulását láthatjuk a 3.10(b) ábrán. Majd ugyanezen állapotból a kontrollal ellátott rendszer alakulását mutatja a 3.10(c) ábra. Sejthető, hogy a kontrollált inga szöge tart a felső pályához és ez a kontroll stabilizálja a tekintett pályát.

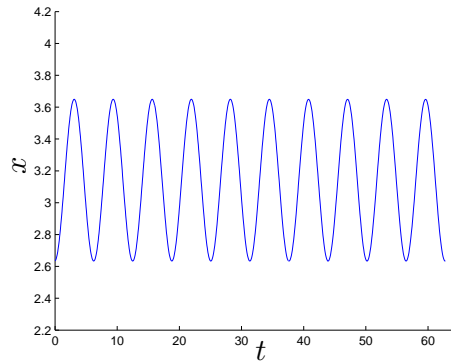
A bizonyításhoz a Poincaré-metszeteken alkalmazott multiplikátor módszert alkalmazzuk. Ezen vizsgálathoz a kényszererő periódusának, és a középpont gyorsulásának periódusának összemérhetőnek kell lennie. Ez jelen esetben igaz, és a minimális közös periódus 2π . Ekkor a két sajátérték:

$$\lambda_1 = -0.4159 + 0.6005i,$$

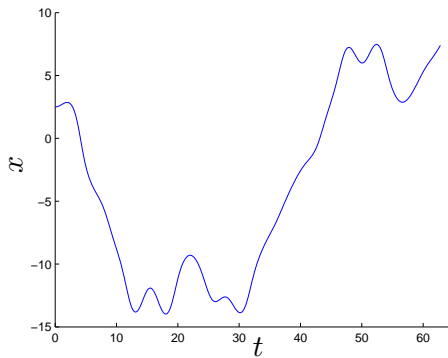
és

$$\lambda_2 = -0.4159 - 0.6005i,$$

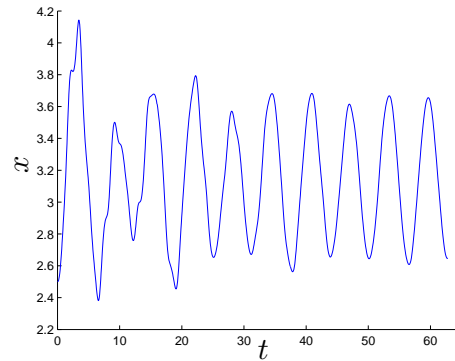
azaz ez a pálya a kontrollal stabil.



(a) Felső instabil pálya.



(b) Kontroll nélküli kaotikus mozgás.



(c) Kontrollált mozgás.

3.10. ábra. A kényszererős inga stabilizálódása.

Kétféle stabilizálási eljárást ismertet a szakirodalom. Az egyik az, amikor a dinamikai rendszer állapotától függően befolyásoljuk a rendszert. Ezt vagy folytonosan, vagy diszkrét időközönként tehetjük meg. Ez a típusú kontroll, melyet „visszacsatolós technikának” is neveznek, a kezdő állapotok sokkal szélesebb körére stabilizálja a kívánt állapotot. A másik eljárás az, amikor a dinamikai rendszer éppen aktuális állapotától nem függ a rendszerre ható erő. Ebben az esetben a kezdő állapotok sokkal kisebb halmazára tapasztalható a stabilizálódás.

Vegyük észre, hogy az ω_f és az ω_v gyorsulások nem függenek az éppen aktuális inga állapotaitól – sem a sebességétől, sem a szögétől. Ezen függvényekben csak a felső instabil pálya megoldása szerepel, melyet akár előre kiszámíthatunk és eltárolhatunk. Tehát a jelen problémán alkalmazott kontroll a nem visszacsatolós technikák körébe tartozik.

4. fejezet

A Wright-sejtés vizsgálata és bizonyítása

Több gyakorlati probléma modellje visszavezethető késleltetett egyenletekre. A késleltetés természetes, ha arra gondolunk, hogy például az információ terjedése időbe telik, és így minden olyan döntés, válasz, vagy reakció – mely ezen információon alapul – késést indukál. Ezen témakörök tanulmányozása során felmerülhet bennünk az a kérdés, hogy a tapasztalt ingadozó viselkedések állandósultak, vagy csak a rövid vizsgálati idő miatt látjuk annak.

A jelen részben egy bő fél évszázada felvetett [72], egyszerűnek tűnő problémát fogunk megvizsgálni. A feladatunk azt eldönteni, hogy egy a differenciálegyenletek jobb oldalán szereplő paraméter függvényében hogyan viselkedik a differenciálegyenlet megoldása, trajektóriája. Hasonló, de páratlan függvénnyel adott jobboldalú esetekre már léteznek eredmények [42, 44]. A nem páratlan esetekkel kapcsolatban több még bizonyítandó feltételezés is van.

Késleltetett differenciálegyenletek megoldására jelenleg nem ismert matematikai bizonyításokban is használható numerikus eljárás. E fejezet első felében egy egyszerű számítógépes vizsgálatot fogunk bemutatni. A programról megmutatjuk, hogy az matematikailag korrekt számításokat végez, és így egy számítógéppel segített matematikai bizonyítást fogunk adni a feltett kérdésre. Az eredményekből látni fogjuk, hogy a módszer működik, de az állítás teljes értékű bizonyításához a jelenlegi számítási kapacitások nem elegendőek. Az ezzel kapcsolatos eredményeket egy összefoglaló cikkben [6] írtuk le.

A fejezet második felében bemutatjuk Wright technikáját a kisebb paraméterekre. E módszer a periodikus megoldások szélsőértékeire ad korlátokat, majd indirekt úton megmutatja, hogy nem létezik a konstans nullán kívül más periodikus megoldás. Wright technikáját továbbgondoltuk, és ötvöztük a korábban említett trajektória követéssel. Majd ezen új korlátokat felállító eljárás fölé egy korlátozás és szétválasztás eljárást készítettünk. Krisztin Tibor és Röst Gergely által elért eredményre támaszkodva [43] képesek voltunk bizonyítani a teljes sejtést [14].

A Wright-sejtéssel és az eddig elért eredményekkel Krisztin Tibor ismertetett meg, melyeket a 4.1.1, a 4.2.1 és a 4.2.2-es fejezetekben mutatunk be. A fejezet első felében található trajektória követésre szolgáló eljárást, és az ahhoz kapcsolódó ered-

ményeket teljes egészében saját eredményemnek tekintem (4.1.2 – 4.1.5-ös fejezetek). Ezen technikával nem tudtuk a sejtést bizonyítani. Ezután mutattuk meg a problémát Arnold Neumaiernek. Az általa javasolt ötletek – mint később kiderült – nem hozták meg a várt eredményeket. Ezen sikertelen eredmények egyik alapvető, közös problémája vezetett el a megoldáshoz. Mégis elmondható, hogy ezen, a Neumaier által javasolt, sikertelen ötletek nélkül nem jutottam volna el, a jelen disszertáció 4.2.3-as fejezetében leírt, korlátozási sémát alkalmazó eljáráshoz. A Wright elméletén alapuló, 4.2.4-es fejezetben ismertetett eljárást saját eredményemnek tekintem. Kiemelném még a periódushossz-számító szubrutint, és a periodikus megoldásban a Wright elméletén alapuló részek „összekapcsolására” szolgáló – általam kitalált – technikákat (4.2.5-ös és 4.2.6-os fejezetek). A 4.2.8-as fejezetben ismertetett korlátozás és a szétválasztás párhuzamosítására szolgáló alapötletet a Jose A. Martinez és Leocadio G. Casado által megvalósított párhuzamosított globális optimalizáló eljárás adta. Az ehhez kapcsolódó tételeket és bizonyításokat Csentes Tibor soros eredményei általánosításával készítettem el. Ezen eljárás beillesztését a sejtés bizonyításába a 4.2.9-es fejezetben ismertetjük, melynek kidolgozását saját munkámnak tekintem.

4.1. Egy késleltetett differenciálegyenlet megoldásának követése

4.1.1. A vizsgált késleltetett differenciálegyenlet

Tekintsük az alábbi késleltetett differenciálegyenletet:

$$z'(t) = -\alpha z(t-1) (1 + z(t)),$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}^+$ paraméter. A megfelelő átalakításokkal ez egy másik, vele ekvivalens, de a jobb oldalon már csak késleltetést tartalmazó alakra hozható. Ha $z(t) \geq -1$ (számunkra csak ez az eset érdekes), akkor tekintsük a $z(t) = e^{y(t)} - 1$ helyettesítést. Ezzel $z'(t) = e^{y(t)} y'(t)$ és $z(t-1) = e^{y(t-1)} - 1$. Így az alábbi egyenletet kapjuk:

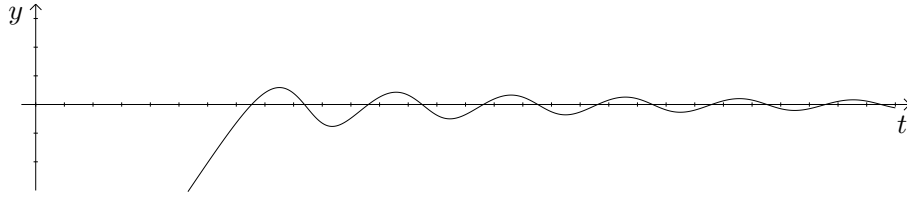
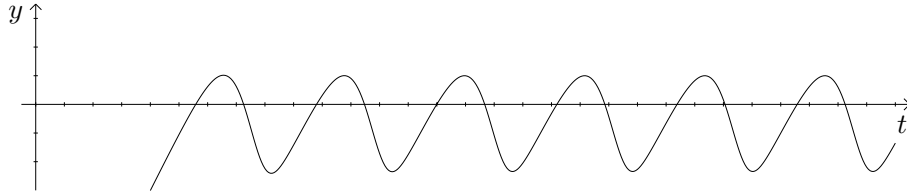
$$e^{y(t)} y'(t) = -\alpha (e^{y(t-1)} - 1) (1 + e^{y(t)} - 1),$$

melyből egyszerűsítés után:

$$y'(t) = -\alpha (e^{y(t-1)} - 1). \quad (4.1)$$

Az indulófüggvény legyen $\phi(s)$, ahol $s \in [-1, 0]$ konstans. Vizsgálatainkat csak a $\phi(s) \equiv -1$ indulófüggvényre korlátozzuk.

Az $\alpha \leq 1.5$ esetben ismert [72], hogy a trajektória oszcillálva konvergál a nullához (lásd a 4.1(a) ábrát az $\alpha = 1.5$ esetre). A $\pi/2$ pontban bifurkáció lép fel, és megjelennek a periodikus pályák. Az $\alpha > \pi/2$ esetén ezen periodikus pályák valamelyikéhez tart a megoldás (lásd a 4.1(b) ábrát az $\alpha = 2.0$ esetre). Ezért a továbbiakban csak az $\alpha \in [1.5, \pi/2]$ eseteket vizsgáljuk. Az eddigi numerikus eredmények alapján az sejthető, hogy a differenciálegyenlet megoldása itt is hasonlóan viselkedik mint az $\alpha \leq 1.5$ esetben.

(a) Az $\alpha = 1.5$ eset.(b) Az $\alpha = 2.0$ eset.

4.1. ábra. Közelítő ábrák a (4.1) egyenlet trajektóriájára.

A nullához való konvergálás vizsgálata numerikus módszerekkel nehézkes, így egy egyszerűsített problémát tanulmányozunk. A feladatunk az, hogy a késleltetett differenciálegyenlet megoldásairól eldöntsük, hogy létezik-e olyan $a \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy az $[a, a+1]$ intervallumon a megoldás abszolút értéke kisebb, mint egy előre megadott konstans. Ez az érték a mi esetünkben legyen 0.075. A probléma így egyszerűbbé vált, mivel a nullához való konvergenciából következik a fenti tulajdonság. Ez a kettő azonban nem ekvivalens állítás, mivel a fordított irány nem szükségszerűen igaz. A trajektória elvileg tarthat egy olyan periodikus megoldáshoz, melynek szélsőértékei a ± 0.075 között vannak, és nem nullák.

4.1.2. A differenciálegyenlet mélyebb vizsgálata

A differenciálegyenletek megoldásainak közelítésére több módszer is ismert. A hagyományos differenciálegyenletekre kifejlesztett matematikai bizonyításokban is használható módszerek egy jó része a Taylor-sorfejtésen alapul [15, 52]. Mi is ezen az elven működő eljárást alkalmazunk a jelenlegi késleltetett differenciálegyenletre.

Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-polinom:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - x_0)^k y^{(k)}(x_0)}{k!} + r_n, \quad (4.2)$$

ahol

$$r_n = \frac{(x - x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x^*), \quad (4.3)$$

valamely alkalmas $x^* \in [x_0, x]$ -re ($x_0 \leq x$).

Ha elhagyjuk az r_n maradéktagot a képletből, akkor egy közelítést kapunk $y(x)$ -re. A kapott formulát megvizsgálva látható, hogy a magasabbrendű deriváltak alkalmazása esetén jobban közelíthető a függvény. A következő állítás segítségével határozhatjuk meg a magasabbrendű deriváltakat.

4.1. Állítás. *A (4.1) késleltetett differenciálegyenlet magasabbrendű deriváltjai ($k \geq 2$) felírhatók a következő formulával:*

$$y^{(k)}(t) = -\alpha y^{(k-1)}(t-1) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} y^{(i)}(t-1) y^{(k-i)}(t). \quad (4.4)$$

Bizonyítás. A bizonyítást k szerinti teljes indukcióval végezzük.

Tekintsük először a $k = 2$ esetet:

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= (-\alpha (e^{y(t-1)} - 1))' = -\alpha e^{y(t-1)} y'(t-1) = \\ &= y'(t-1) (-\alpha (e^{y(t-1)} - 1)) - \alpha y'(t-1) = \\ &= y'(t-1) y'(t) - \alpha y'(t-1) = \\ &= -\alpha y^{(1)}(t-1) + \binom{0}{0} y^{(1)}(t-1) y^{(1)}(t) = \\ &= -\alpha y^{(2-1)}(t-1) + \binom{2-2}{1-1} y^{(1)}(t-1) y^{(2-1)}(t) = \\ &= -\alpha y^{(k-1)}(t-1) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} y^{(i)}(t-1) y^{(k-i)}(t). \end{aligned}$$

Tegyük fel most, hogy valamely $k \geq 2$ -re igaz az állítás. Nézzük a $k+1$ esetet.

$$\begin{aligned} y^{(k+1)}(t) &= (y^{(k)}(t))' = \\ &= \left(-\alpha y^{(k-1)}(t-1) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} y^{(i)}(t-1) y^{(k-i)}(t) \right)' = \\ &= -\alpha y^{(k-1+1)}(t-1) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} (y^{(i+1)}(t-1) y^{(k-i)}(t) + y^{(i)}(t-1) y^{(k-i+1)}(t)) \end{aligned}$$

Mivel az első tag már azonos azzal amit szeretnénk elérni, így vizsgálatainkat folytassuk a második taggal.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} (y^{(i+1)}(t-1) y^{(k-i)}(t) + y^{(i)}(t-1) y^{(k-i+1)}(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} (y^{(i+1)}(t-1) y^{(k-i)}(t)) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} (y^{(i)}(t-1) y^{(k-i+1)}(t)) = \\ &= \binom{k-2}{k-1-1} (y^{(k-1+1)}(t-1) y^{(k-k+1)}(t)) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-2} \binom{k-2}{i-1} (y^{(i+1)}(t-1) y^{(k-i)}(t)) + \\ &\quad + \binom{k-2}{1-1} (y^{(1)}(t-1) y^{(k-1+1)}(t)) + \\ &\quad + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} (y^{(i)}(t-1) y^{(k-i+1)}(t)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{k+1-2}{k+1-2} (y^{(k+1-1)}(t-1)y^{(k+1-k)}(t)) + \\
&\quad + \binom{k+1-2}{0} (y^{(1)}(t-1)y^{(k+1-1)}(t)) + \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k-2}{i-1-1} (y^{(i)}(t-1)y^{(k-i+1)}(t)) + \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} (y^{(i)}(t-1)y^{(k-i+1)}(t)) = \\
&= \binom{k+1-2}{k+1-2} (y^{(k+1-1)}(t-1)y^{(k+1-k)}(t)) + \\
&\quad + \binom{k+1-2}{0} (y^{(1)}(t-1)y^{(k+1-1)}(t)) + \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k+1-2}{i-1} (y^{(i)}(t-1)y^{(k-i+1)}(t))
\end{aligned}$$

Azaz

$$y^{(k+1)}(t) = -\alpha y^{(k+1-1)}(t-1) + \sum_{i=1}^{k+1-1} \binom{k+1-2}{i-1} (y^{(i)}(t-1)y^{(k+1-i)}(t)),$$

mellyel az állítást bizonyítottuk. ■

Vegyük észre, hogy a (4.1) egyenlet jobb oldalán csak az $y(t-1)$ érték szerepel, így egy t időpillanatban az első derivált számítható a $(t-1)$ pontbeli függvényérték ismerete alapján. A magasabbrendű deriváltak kiszámításához elegendő, ha a t és a $(t-1)$ időpillanatban az alacsonyabbrendű deriváltak értéke rendelkezésre áll. Tehát egy t időpillanatban az összes deriváltat ki tudjuk számolni az alacsonyabbrendű deriváltaktól haladva a magasabbrendűek felé.

Az alábbi tétel szerint a megoldás létezéséhez elégséges feltétel, hogy a függvény folytonos legyen.

4.2. Tétel. *Tekintsük az $y'(t) = f(y(t-1))$ ($t \geq 0$) késleltetett differenciálegyenletet, a $\phi(t)$ ($t \in [-1, 0]$) indulófüggvénnyel. Folytonos jobboldalú és folytonos indulófüggvénnyel adott explicit késleltetett differenciálegyenletnek létezik megoldása.*

Bizonyítás. A tétel állítása hasonló a Cauchy-Peano-féle egzisztenciátételhez, de mivel mi most egy tisztán késleltetett differenciálegyenletről állítjuk ugyanazt, ezért a bizonyítás is egyszerűbb.

Elegendő a $[0, 1]$ időintervallumon vizsgálni a megoldást. Ha ezen az intervallumon létezik folytonos megoldás, akkor a következő 1 hosszú intervallumra ugyanezt a bizonyítási eljárást alkalmazhatjuk.

Vegyük észre, hogy a $t \in [0, 1]$ időpontban a függvény értéke az alábbi formulával számolható:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(x) dx = y(0) + \int_{-1}^{t-1} -\alpha(e^{y(x)} - 1) dx.$$

Ha tehát y' integrálható, akkor az y egy folytonos függvény lesz a $[0, 1]$ intervallumon. Ehhez elegendő, hogy $y'(t)$ véges sok pont kivételével folytonos legyen. Ez azonban következik abból, hogy $y(t)$ folytonos a $[-1, 0]$ intervallumon. ■

A tételben szereplő f függvény folytonos, így mindig létezik egy megoldás, és alkalmazható rá közelítésként a Taylor-polinom. Ezek után azt vizsgáljuk meg, hogy a (4.1) differenciálegyenlet magasabbrendű deriváltjainak hol lehetnek szakadási pontjai.

4.3. Állítás. *A (4.1) differenciálegyenlet szakadási pontjaira az alábbiak igazak:*

1. *a differenciálegyenletnek és magasabbrendű deriváltjainak csak az egészértékű pontokban lehet szakadási pontja,*
2. *az i . deriválnak az $(i - 1)$ -nél nagyobb egész pontokban már nem lehet szakadási pontja ($i \geq 0$).*

Bizonyítás. Az állítás bizonyításához a 4.1. Állításban szereplő képletet, és a (4.1) egyenletet kell megvizsgálni. Vegyük észre, hogy a vizsgált indulófüggvény is, és a deriváltjai is folytonosak a $[-1, 0)$ intervallumon. Legyen a vizsgált pont $t \geq 0$. A folytonos függvények szorzata és összege is folytonos függvény. A deriváltakra vonatkozó képletekben csak a t és $(t - 1)$ pontok szerepelnek. Ahhoz, hogy szakadási pontja legyen a tekintett derivált függvénynek, valamely alacsonyabbrendű deriválnak ezen pontok valamelyikében szakadási pontjának kell lennie. Így ha van szakadási pont, akkor azok távolsága 1. A tekintett indulófüggvény első deriváltjának csak a 0-ban van szakadási pontja, tehát az első állítás igaz.

A második állítás igazolásához is elegendő a képletek alapján vizsgálni a folytonosságot. A megoldásról, azaz az $i = 0$ esetben már láttuk az előző tételben, hogy mindenütt folytonos. A magasabbrendű deriváltak esetében a képleteket megvizsgálva látható, hogy az i . deriválnak akkor lesz szakadási pontja, ha a $0 \dots (i - 1)$ deriváltak közül legalább az egyiknek van szakadási pontja a t vagy a $(t - 1)$ pontok valamelyikében. Az indulófüggvény folytonos, így az első derivált is folytonos lesz 0 után, a második derivált pedig folytonos lesz 1 után és így tovább. Tehát a második állítás is igaz. ■

Mivel az első derivált függvénye folytonos a $t > 0$ időpillanatokban és mindenütt létezik, így az korlátos is. Vegyük észre, hogy az első derivált a $t = 0$ időpillanatban is korlátos. E két tulajdonságból következik, hogy az első derivált korlátos minden $[-1, t']$ időintervallumon, ahol $t' \geq -1$. Ebből a tulajdonságból következik a differenciálegyenlet megoldásának egyértelműsége is, azonban jelen eredményekben ezt nem használjuk ki.

4.1.3. Az intervallumos befoglalás használata

Az intervallumaritmetika segítségével megbízható számítások végezhetők, így alkalmas bizonyos problémák matematikai erejű bizonyítására. Jelen esetben a bizonyításhoz a Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-polinom intervallumos megvalósítása jól használható. A matematikai bizonyításhoz a formulákat megbízható alakban, intervallumos befoglaló függvényekkel kell alkalmazni. Módszerünk alapja az, hogy az r_n -re megpróbálunk egy befoglaló intervallumot adni. Ennek segítségével már be tudjuk foglalni a $y(x)$ megoldást.

4.4. Állítás. Az x időpontban ($x \geq x_0$) a függvényérték befoglalására, azaz

$$y(x) \in Y(x),$$

a Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-polinom az alábbi formában alkalmazható:

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + R_n\text{-ra},$$

ahol

$$R_n = Y^{(n)}([x_0, x]) \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Bizonyítás. Egy konkrét pontban a függvényérték befoglalásához az r_n értéket kell befoglalni, mivel a (4.2) képlet első tagja egyszerűen meghatározható. Természetesen e tag kiértékelését is megbízhatóan kell elvégezni, hogy garantált befoglalást kapjunk rá. A (4.3) formula szerint létezik olyan $x^* \in [x_0, x]$ érték, melyre r_n pontos. Ha az r_n befoglalását az állításban szereplő formulával határozzuk meg az $[x_0, x]$ intervallumon, akkor az $Y(x)$ befoglalás korrekt lesz, így $y(x) \in Y(x)$. ■

A 4.4. Állítás alkalmazásához szükség van az $Y^{(n)}([x_0, x])$ értékre. Ez egy magasabbrendű derivált, melyre láttuk, hogy meghatározásához szükség van $y(t-1)$ -re, azaz az $Y([x_0-1, x-1])$ befoglaló intervallumra. Az előző módszer megfelelő módosításokkal működik az $[x_0, x]$ intervallumon is.

4.5. Állítás. Az $[x_0, x]$ időintervallumon a függvényérték befoglalására, azaz

$$y([x_0, x]) \subseteq Y([x_0, x]),$$

a Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-polinom az alábbi formában alkalmazható:

$$Y([x_0, x]) = \sum_{k=0}^{n-1} Y^{(k)}(x_0) \frac{([0, x - x_0])^k}{k!} + R_n,$$

ahol

$$R_n = Y^{(n)}([x_0, x]) \frac{([0, x - x_0])^n}{n!}.$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $x' \in [x_0, x]$ pontot. Azt kell belátni, hogy az $Y([x_0, x])$ befoglalás tartalmazza az $y(x')$ értéket. Az előbbiekben láttuk, hogy az $Y(x')$ intervallumnak eleme az $y(x')$ érték. Vegyük észre, hogy az $[x_0, x']$ intervallum részintervalluma az $[x_0, x]$ -nek, illetve $(x' - x_0)$ része a $[0, x - x_0]$ intervallumnak. Ezen befoglalásokat felhasználva adódik, hogy az $Y([x_0, x])$ befoglaló intervalluma tartalmazza az $Y(x')$ értéket, és ezzel az állítást igazoltuk. ■

4.6. Tétel. A fenti formulákkal megbízható befoglalás adható a (4.1) differenciálegyenlet megoldására.

Bizonyítás. Egy teljes indukcióhoz hasonló gondolatmenettel belátható a tétel. A $[-1, 0]$ intervallum minden pontjában ismert a $0, \dots, n$ -dik deriváltak egy-egy befoglalása. Tegyük fel, hogy minden $-1 \leq t \leq x$ -re tudjuk a függvény és a deriváltak befoglalását. Tekintsünk egy tetszőleges $x_0 \in [x, x+1]$ pontot. Ekkor az első deriváltak befoglalása kiszámítható az x_0 pontban és az $[x, x_0]$ intervallumon a (4.1) képlettel. Mivel a magasabbrendű deriváltak meghatározásához elegendő az első derivált ismerete az $[x, x_0]$ intervallumon, valamint a magasabbrendű deriváltaké az $[x-1, x_0-1]$ -en, így a 4.1. Állításban szereplő formulával számítható a magasabbrendű deriváltak befoglalása. A deriváltak ismeretében a 4.4. és a 4.5. Állítások alkalmazásával számítható a függvény egy befoglalása az x pontban és az $[x, x_0]$ intervallumon. Ezzel x_0 -ig ismert a $0, \dots, n$ -dik deriváltak egy befoglalása. ■

A magasabbrendű deriváltak képlettel számíthatók, és minden $t \geq -1$ pontban létezik megoldás. Így a bizonyításon alapuló eljárással egy adott indulófüggvényből bármely $t \geq 0$ pontban meghatározható a megoldás egy befoglalása.

Visszatérve a kezdeti problémához, azt kell megvizsgálnunk, hogy van-e olyan 1 hosszú szakasza a megoldás befoglalásának, amely teljes egészében a $[-0.075, 0.075]$ intervallumba esik. Ez a kérdés megbízható módon eldönthető a befoglaló intervallumok végpontjainak vizsgálatával. Azt fogjuk majd megvizsgálni, hogy milyen esetben nincs értelme folytatni a trajektória követését. Ehhez előbb a következő állítást fogjuk igazolni.

4.7. Állítás. *A trajektória befoglalásának szélessége az x_0 pontban ($x_0 > x$) nem kisebb, mint az x -ben.*

Bizonyítás. Mivel $x_0 > x$, így az x_0 pont eléréséhez legalább egy lépés szükséges az x pontból indulva. Elegendő azt belátni, hogy egyetlen lépésben sem csökken a befoglalás szélessége. Vegyük észre, hogy ha egy intervallumhoz intervallumaritmetika segítségével hozzáadunk egy másikat, akkor az eredeti intervallumnál nem kaphatunk kisebb szélességűt. Azzal megegyező szélességűt is csak abban az esetben kapunk, ha a hozzáadott intervallum szélessége 0. Most vizsgáljuk meg a 4.4. Állításban szereplő képletet. Az összegzést kibontva pontosan n darab összeadás szerepel a képletben. A $k = 0$ esetben az $Y(x)$ -et kapjuk, melyhez már csak további intervallumokat adunk hozzá. Ezzel igazoltuk, hogy nem csökken a befoglalás szélessége. ■

Mivel a megoldásnak abszolút értékben kisebbnek kell lennie 0.075-nél, ezért a megfelelő sáv szélessége $2 \cdot 0.075$. Az állításból következik, hogy ha az x pontban a függvényérték befoglaló intervallumának szélessége legalább $2 \cdot 0.075$, akkor az $x_0 > x$ pontokban sem lesz kisebb. Így az x -nél nagyobb pontokban a feladatnak megfelelő szakaszt már nem találhatunk. Azaz a trajektória további követése nem vezethet sikerre.

4.1.4. Az ellenőrző eljárás

A függvény és derivált értékek befoglalását az x_i időpillanatban is, és a $t_i = [x_{i-1}, x_i]$ időintervallumon is eltároljuk. A trajektória követését az $x_i - x_{i-1} = c$ fix lépésközzel valósítjuk meg minden i -re, ahol c egy konstans. A számítógép

pontosságára tekintettel ezt a c konstanst a számítógépen ábrázolható számok közül választjuk ki. A befoglalások számításához az x_i -ben, valamint a t_i -ben az $(x_i - 1)$ és a $(t_i - 1)$ időbeli értékekre van szükség. Ezért érdemes a c konstanst úgy megválasztani, hogy ha az x_i -ben van végpont, akkor az $(x_i + 1)$ -ben is legyen. Ekkor a befoglalásokat nem kell újra számolni több befoglalásból. A c konstans minden esetben 2^{-n} alakú, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. A kezdeti 1 hosszú szakaszon a függvény értékére és deriváltjaira könnyen adható befoglalás minden x_i és t_i időben.

Két különböző listában tároljuk az x_i helyeken és a t_i időben a függvény és a derivált értékek befoglalását. A két listát a későbbiekben \mathcal{X} -szel és \mathcal{T} -vel jelöljük. Ezen függvényleírásból mindkét listában pontosan n darab lesz. A \mathcal{T} lista összes eleme pontosan 1 hosszú szakaszt tartalmaz, mely minden egyes pontjában befoglalja a függvényt. Ez elegendő a feltett kérdés megválaszolásához.

Az eljárás a listákat bővíteni fogja a következő x_i és t_i időben a függvény és a derivált értékek befoglalásával. A 4.6. Tételből következik, hogy a befoglalások kiszámításához elegendő a \mathcal{T} lista első eleme, valamint az \mathcal{X} lista első és utolsó eleme. Az új befoglalásokat betesszük a listák végére, és az első elemet töröljük a listákból. A \mathcal{T} lista megint egy teljes, 1 hosszú időintervallumon írja le a függvényt.

Ezekkel a megkötésekkel elértük, hogy minden lépés előtt az alábbi állítások igazak:

1. A \mathcal{T} lista első eleme tartalmazza az N . lépésben az $y^{(i)}([(N - 2^n)/2^n, (N - 2^n + 1)/2^n])$ ($i = 0, \dots, K$) deriváltak befoglalásait.
2. Az \mathcal{X} lista első eleme tartalmazza az N . lépésben az $y^{(i)}((N - 2^n + 1)/2^n)$ ($i = 0, \dots, K$) deriváltak befoglalásait.
3. Az \mathcal{X} lista utolsó eleme tartalmazza az N . lépésben az $y^{(i)}(N/2^n)$ ($i = 0, \dots, K$) deriváltak befoglalásait.

A \mathcal{T} és az \mathcal{X} lista következő elemeinek a meghatározásához pontosan ezekre az értékekre van szükségünk. Ezek ellenőrzésekor elegendő az új $Y([(N - 2^n)/2^n, (N - 2^n + 1)/2^n])$ befoglalást megvizsgálni, és ha arra igaz az állítás, akkor egy számlálót növelni, egyébként nullázni. Ha a számláló elérte az 1 hosszú szakaszhoz szükséges értéket, akkor megtaláltuk a szakaszt, amely igazolja a feltételezést. A 4.7. Állításból ismert, hogy a befoglalás szélessége a lépések során nem csökken, és ha az $Y(N/2^n)$ befoglalás szélessége nagyobb, mint $2 \cdot 0.075$, akkor már soha nem fog beleférni a kívánt sávba. Ekkor az algoritmus sikertelen kereséssel áll meg.

A 4. Algoritmus a 4.6. Tétel bizonyítása alapján készült, és minden számítása garantált megbízhatóságú. Az eljárás sikeres futása esetén matematikai bizonyossággal állíthatjuk, hogy létezik egy 1 hosszú szakasz a feladat megoldásaként. Egyébként nem állíthatjuk azt, hogy nem létezik ilyen szakasz, azaz a jelenleg használt számítási paraméterekkel a befoglalások szélességének növekedése miatt nem volt sikeres a kísérlet. Ebben az esetben nem zárható ki az adott feladatra egy ilyen szakasz létezése. Elméletileg előfordulhat, hogy az intervallum szélessége soha nem lesz a korlátnál nagyobb, és nem talál 1 hosszú szakaszt sem. Ekkor az eljárás egy végtelen ciklusba kerülne, de ez a számítógép véges pontosságát tekintve nem fordulhat elő.

4. Algoritmus. A trajektória követése.

-
- Input:*
- K : a használt legmagasabbrendű derivált rendje,
 - $1/2^n$: a lépés nagysága,
 - $k = 0.075$: a feladat kitűzésében szereplő konstans,
 - $\phi(s) \equiv -11$: az indulófüggvény.
- Output:*
- Egy $[a, a + 1]$ intervallum, melyen a függvényérték abszolút értéke kisebb mint k , vagy
 - az a megállapítás, hogy nem talált megfelelő intervallumot.
-

- 0. lépés:** Töltsük fel a listákat a $[-1, 0]$ szakaszon levő befoglalásokkal, és legyen $N = 0$.
 - 1. lépés:** Vegyük ki a listák első elemét, és az \mathcal{X} lista utolsó elemét.
 - 2. lépés:** Számítsuk ki a (4.4) képlet használatával az $[N/2^n, (N + 1)/2^n]$ intervallumon az $Y^{(i)}$ ($i = 1 \dots K$) deriváltakat.
 - 3. lépés:** Határozzuk meg a (4.4) képlet felhasználásával az $(N + 1)$ pontban az $Y^{(i)}$ ($i = 1 \dots K$) deriváltakat.
 - 4. lépés:** Számítsuk ki a 4.4. Állítás segítségével az $[N/2^n, (N + 1)/2^n]$ intervallumon az Y értékeket.
 - 5. lépés:** Határozzuk meg a 4.5. Állítás segítségével az $(N + 1)/2^n$ pontban az Y értéket.
 - 6. lépés:** Frissítsük a két listát.
 - 7. lépés:** Legyen N új értéke $N + 1$.
 - 8. lépés:** Ellenőrizzük az új $Y([(N - 1)/2^n, N/2^n])$ befoglalást. Ha megfelel az $|x| \leq k$ feltételnek és elértük az 1 hosszú szakaszt, akkor az $[N/2^n - 1, N/2^n]$ intervallum a megoldás, és STOP.
 - 9. lépés:** Ha az $Y((N + 1)/2^n)$ pontban a befoglalás nagyobb mint $2 \cdot k$, akkor nem talált megfelelő intervallumot és STOP.
 - 10. lépés:** Folytassuk az 1. lépéssel.
-

4.1.5. Eredmények

A jelen problémát mind a C-XSC, mind a PROFIL/BIAS könyvtár használatával egyaránt megvalósítottuk. Mindkét könyvtár az „Interval” típus végpontjait C-beli double típussal ábrázolja. A végpontok pontossága befolyásolja az intervallumaritmetika pontosságát. Esetünkben ez az alaptípus nem volt elegendően pontos. Mindkét könyvtárban megtalálható azonban egy nagyobb precizitást szolgáló intervallum típus. A C-XSC a végpontokat több double típussal írja le [37], és ezek száma beállítható, míg a PROFIL/BIAS esetén a kívánt pontosságot lehet megadni [39].

Első lépésben az $\alpha = 1.5$ esetet vizsgáltuk, melyre ismert, hogy a megoldás nullához tart. Ekkor találnunk kell egy megfelelő 1 hosszú szakaszt. A 25. deriváltig számoltuk a befoglalásokat, és a lépésnagyságot $2^{-3} = 1/8$ -nak választottuk.

Ehhez, az általunk vizsgáltak közül a legegyszerűbb feladathoz is már szükség volt a nagyobb pontosságot használó intervallumaritmetikára. Az első megfelelő szakasz az $[56, 57]$ időintervallum volt, amelyre $|Y([56, 57])| \leq 0.075$ teljesült. Ennek megtalálásához 25 másodperc CPU időre volt szükség egy egyszerű asztali számító-

A deriváltak száma	Lépéshossz								
	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
5	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10	X	X	X	X	X	X	105	213	431
15	X	X	X	X	45	93	187	373	771
20	X	X	X	35	73	150	291	585	1157
25	X	X	25	53	107	212	424	851	1695
30	X	X	36	72	146	292	584	1169	2314
35	X	23	48	96	191	383	765	1530	3055
40	X	30	61	123	245	491	980	1956	3903
45	X	38	77	153	306	611	1220	2437	4862

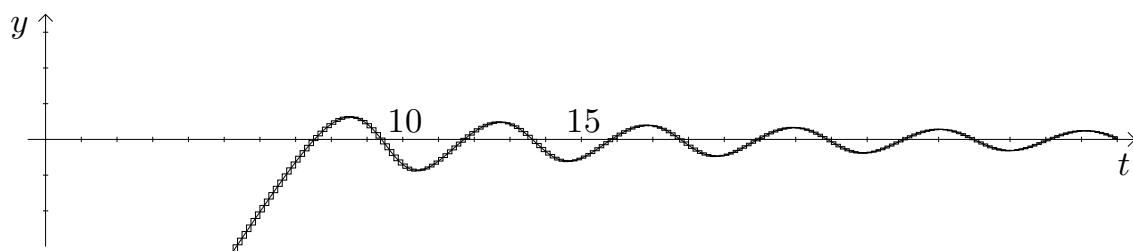
4.1. táblázat. A szükséges CPU idő (másodpercben) az $\alpha = 1.5$ eset vizsgálatakor. A táblázat sorai a használt deriváltak maximális rendjét, míg az oszlopok a lépés nagyságát jelentik. Az X-szel jelölt esetekben a bizonyítás nem sikerült.

gépen (Pentium IV, 2.2 GHz-es processzor).

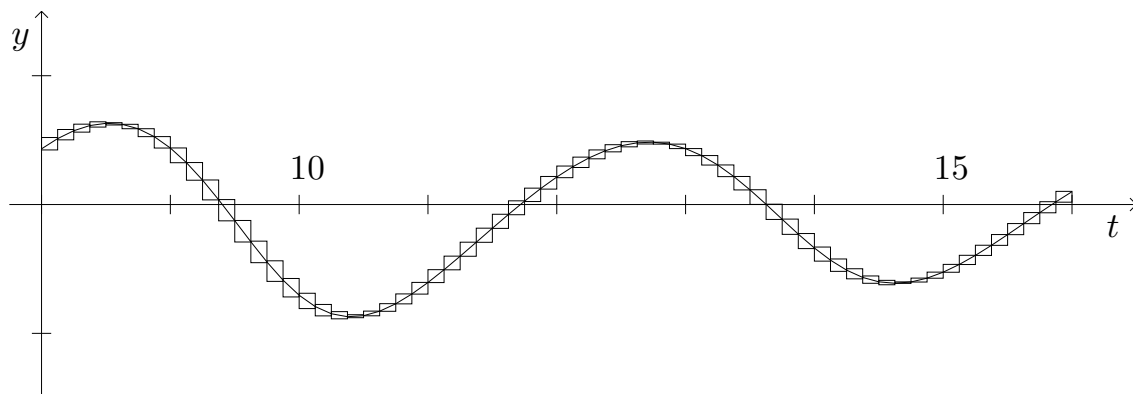
A 4.2. ábrán a trajektória befoglalását láthatjuk az idő függvényében. Mivel a lépés nagysága 2^{-3} , így egy 1 hosszú szakasz felett pontosan 8 darab befoglalás található. A szomszédos befoglaló téglalapok függőleges oldalai pontosan egy egyenesre illeszkednek, és ezek az oldalak nem csatlakoznak a végpontjaikban, hanem részben átfedik egymást. Ez az átfedés tartalmazza egy adott időpillanatban a függvényérték befoglalását. A 4.2(c) ábrán ugyanaz a trajektória befoglalás látható. A téglalapok ebben az esetben az y függvényérték és az y' első derivált befoglalását ábrázolják.

A 4.1. táblázatban látható, hogy azonos rendű deriváltak használata mellett, ha a lépéshossz felére csökken, akkor a szükséges idő kb. kétszeresére nő. Ennek a magyarázata egyszerű: körülbelül kétszer annyi lépést kell végrehajtani, mint a kétszeres lépéshossz esetén. A másik észrevehető tulajdonság, hogy az alkalmazott deriváltak maximális számának csökkentésével csökken a szükséges CPU idő is. Ennek magyarázata a magasabbrendű deriváltak számításához használt egyre összetettebb képlet, mely lassítja a számítást. Látható viszont az is, hogy mindkettő túlzott csökkentésével a bizonyítás nem sikerül.

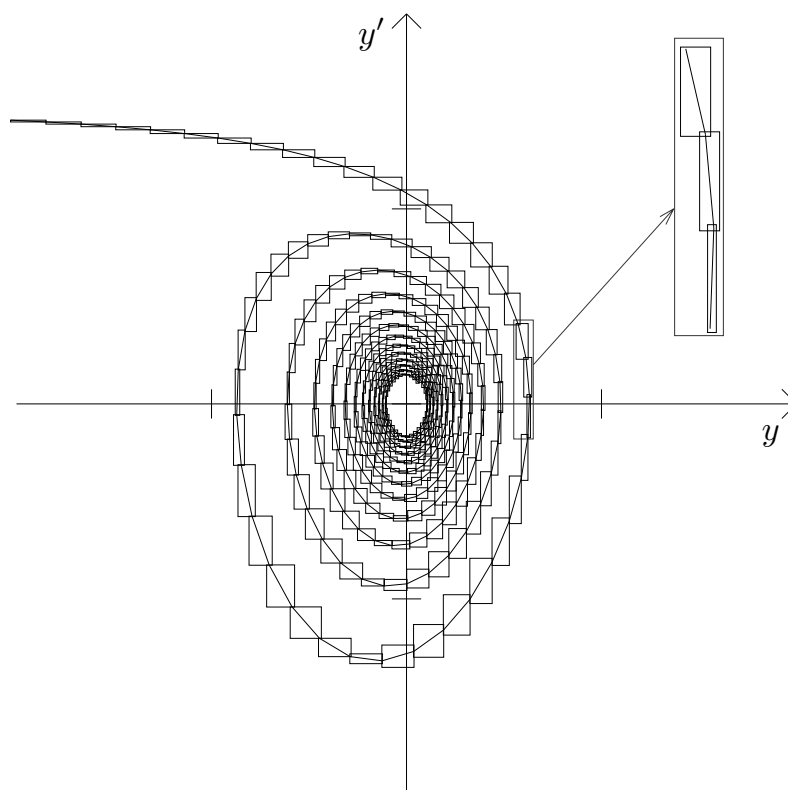
Azt is megvizsgáltuk, hogy milyen pontosság érhető el a számítások során használt intervallumok végpontjainak pontosságával (a 4.2. táblázat). Az $\alpha = 1.5$ esetben különböző paraméterekkel követtük a trajektóriát a $[0, 50]$ időintervallumon. Megnéztük, hogy ez mennyi számítási időt igényelt, és mennyire pontos a függvényérték befoglalása a $t = 50$ időpillanatban. Megfigyelhető, hogy a kívánt számítási pontosság növelésével nőtt a számítások költsége, így a szükséges CPU idő is. Azonban az elérhető pontosságot nem tudjuk kihasználni, ha nem használunk magasabbrendű deriváltakat. A számítási pontosságot nem változtatva, pusztán a magasabbrendű derivált használatával, nem tudunk nagyobb pontosságot elérni.



(a) A teljes trajektória egy részlete.



(b) Az (a) ábrán látható befoglalás egy kinagyított részlete.

(c) A teljes trajektória az y - y' térben.

4.2. ábra. A trajektória közelítése az $\alpha = 1.5$ esetben és annak garantált befoglalása.

A deriváltak száma	Az intervallumok k dupla pontos számítással			
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 4$	$k = 8$
15	6 $2.78 \cdot 10^0$	9 $2.01 \cdot 10^{-1}$	12 $2.01 \cdot 10^{-1}$	21 $2.01 \cdot 10^{-1}$
20	11 $2.58 \cdot 10^0$	15 $7.70 \cdot 10^{-5}$	19 $7.70 \cdot 10^{-5}$	32 $7.70 \cdot 10^{-5}$
25	17 $2.58 \cdot 10^0$	23 $2.86 \cdot 10^{-9}$	28 $2.86 \cdot 10^{-9}$	46 $2.86 \cdot 10^{-9}$
30	24 $2.58 \cdot 10^0$	32 $7.24 \cdot 10^{-14}$	40 $7.24 \cdot 10^{-14}$	63 $7.24 \cdot 10^{-14}$
35	32 $2.58 \cdot 10^0$	43 $2.60 \cdot 10^{-15}$	54 $2.06 \cdot 10^{-19}$	84 $2.06 \cdot 10^{-19}$
40	42 $2.58 \cdot 10^0$	55 $2.60 \cdot 10^{-15}$	70 $7.89 \cdot 10^{-23}$	108 $7.89 \cdot 10^{-23}$
\vdots				
75	145 $2.58 \cdot 10^0$	182 $2.60 \cdot 10^{-15}$	249 $1.79 \cdot 10^{-47}$	390 $3.01 \cdot 10^{-54}$
80	164 $2.58 \cdot 10^0$	206 $2.60 \cdot 10^{-15}$	282 $1.79 \cdot 10^{-47}$	446 $2.11 \cdot 10^{-58}$

4.2. táblázat. A számításokhoz szükséges CPU idő (másodpercben) és a $t = 50$ időpillanatban a függvényérték befoglalásának szélessége az $\alpha = 1.5$ eset vizsgálatkor. A táblázat sorai a használt deriváltak maximális rendjét, míg az oszlopok a számítások során használt intervallumok végpontjainak pontosságát jelentik.

Így minden számítási pontossághoz tartozik egy optimális deriváltrend, és minden használni kívánt deriválthoz létezik egy optimális számítási pontosság. Azaz a számítási pontosságot növelve magasabbrendű deriváltakat is használhatunk, de ekkor a CPU idő is nő. A 4.1. táblázatban azt láthattuk, hogy minden lépéshoz egy minimális nagyságú rendet kell használni. Más szóval, a magasabbrendű deriváltak használatával csökkenthetjük a lépéshossz nagyságát, mellyel a CPU idő csökkenése is együtt jár. Összegezve láthatjuk, hogy a szükséges CPU idő a lépés nagyságtól és a számítási pontosságtól függ, melyek fordított arányban állnak egymással.

Az eddigi eredményekből láthatjuk, hogy a használt lépésmagyság, a számítási pontosság és a maximális deriváltrend erősen befolyásolja a bizonyítás sikerességét és annak idejét. Ezen paraméterek optimális beállítása egy újabb probléma. Vizsgáljuk meg, hogyan alakul a trajektória befoglalásának szélessége. A 4.3. táblázat az adott időpillanatra a befoglaló intervallum szélességét tartalmazza. Azt tapasztalhatjuk, hogy egy egységnyi idő alatt a befoglalás szélessége körülbelül a kétszeresére nő. Ez az arány más α értékekre is csak kicsit romlik. Közelítő számításokból tudjuk, hogy a feltett kérdésre melyik lehet a megfelelő 1 hosszú szakasz. Ebből a két tulajdonságból már meghatározható, hogy hol milyen széles lehet a befoglaló intervallum egy sikeres bizonyítás esetén.

Az eddigi ismereteink alapján összeállítottunk egy optimalizáló eljárást a para-

t	szélesség	t	szélesség	t	szélesség	t	szélesség
1	$9.12 \cdot 10^{-31}$	11	$1.97 \cdot 10^{-23}$	21	$8.66 \cdot 10^{-20}$	31	$1.88 \cdot 10^{-15}$
2	$2.26 \cdot 10^{-30}$	12	$9.33 \cdot 10^{-23}$	22	$2.06 \cdot 10^{-19}$	32	$4.60 \cdot 10^{-15}$
3	$2.71 \cdot 10^{-30}$	13	$2.30 \cdot 10^{-22}$	23	$4.59 \cdot 10^{-19}$	33	$1.02 \cdot 10^{-14}$
4	$3.37 \cdot 10^{-30}$	14	$6.29 \cdot 10^{-22}$	24	$8.43 \cdot 10^{-19}$	34	$2.32 \cdot 10^{-14}$
5	$3.89 \cdot 10^{-30}$	15	$1.35 \cdot 10^{-21}$	25	$1.64 \cdot 10^{-18}$	35	$5.31 \cdot 10^{-14}$
6	$4.24 \cdot 10^{-30}$	16	$2.30 \cdot 10^{-21}$	26	$6.93 \cdot 10^{-18}$	36	$1.05 \cdot 10^{-13}$
7	$4.90 \cdot 10^{-30}$	17	$4.58 \cdot 10^{-21}$	27	$1.16 \cdot 10^{-17}$	37	$2.05 \cdot 10^{-13}$
8	$7.33 \cdot 10^{-30}$	18	$1.13 \cdot 10^{-20}$	28	$3.46 \cdot 10^{-17}$	38	$4.49 \cdot 10^{-13}$
9	$2.85 \cdot 10^{-28}$	19	$2.49 \cdot 10^{-20}$	29	$2.22 \cdot 10^{-16}$	39	$9.95 \cdot 10^{-13}$
10	$2.24 \cdot 10^{-25}$	20	$4.42 \cdot 10^{-20}$	30	$6.38 \cdot 10^{-16}$	40	$1.98 \cdot 10^{-12}$

4.3. táblázat. A befoglalás szélességének alakulása a t időpillanatban az $\alpha = 1.5$ esetben.

méterek helyes beállítására. Az eljárás egy korlátos, három paraméteres egészértékű optimalizálási feladatot old meg. A három optimalizálandó változó a lépésmagyság, a műveletek pontossága és a maximális deriváltrend. Ezen paraméterek mellett követjük a trajektóriát egy adott konstans ideig. Az ehhez szükséges CPU időt fogjuk minimalizálni. A korlátozó feltételnek pedig azt írjuk elő, hogy ebben az időpillanatban a befoglalás maximális szélessége ne legyen nagyobb, mint egy adott konstans.

Ez az eljárás az $\alpha = 1.5$ -re a 20 időpillanatban a 10^{-20} -os korlátozó feltétellel a végső befoglalás szélességére a 10.6 másodperces optimumot adta. Az optimális megoldás:

- deriváltak száma: 28,
- lépésmagyság: 2^{-3} ,
- számítás: 2 dupla pontos számmal.

Ez az eredmény közelítőleg megegyezik a korábban tapasztaltakkal. A magasabbrendű deriváltakra vonatkozó követelményt a korlát túl kicsire állításával magyarázható. A 10^{-20} -os korlátnál nagyobb is elegendő a bizonyításhoz. Az optimum értékből a szükséges teljes időre a $10.6 \cdot \frac{54}{20} = 28$ másodperces becslést kaphatjuk, mely úgyszintén igazodik az eddigi eredményeinkhez.

A következő lépésként egy α intervallumon próbáltuk bizonyítani a feladat állítását. Mivel a kezdeti intervallumok szélessége erősen befolyásolja a későbbi befoglalások pontosságát, így α esetében nem dolgozhatunk széles intervallumokkal. Az $\alpha = [1.5, 1.5 + 10^{-22}]$ intervallum a legszélesebb olyan intervallum, melyre sikerült bizonyítani a feladat állítását. A futási paraméterek értéke és a szükséges CPU idő hasonló nagyságrendű volt, mint az előző esetben.

A harmadik kísérletben egy nagyobb α -t választottunk:

$$\alpha = 1.546875 = 1 + 1/2 + 1/32 + 1/64,$$

amely pontosan ábrázolható számítógépen. Ehhez magasabbrendű deriváltakat is fel kellett használnunk. Lépéshosszként a $2^{-4} = 1/16$ értéket használtuk. Ekkor a

$$[115.938, 116.938]$$

intervallum volt az első olyan 1 hosszú szakasz, mely teljesítette a feltételt. A feladat bonyolultságát jelzi, hogy ehhez már több órányi CPU időre volt szükség.

A továbbiakban több α értékkel is futtattuk a programot. Minél nagyobb volt az α értéke, azaz minél jobban közelítettünk a $\pi/2$ -höz, annál nagyobb pontosságra volt szükségünk. Ennek következtében a szükséges deriváltak száma, valamint a számításhoz használt CPU idő is jelentősen megnőtt. Az ellenőrizhető α intervallumok szélessége pedig erősen csökkent.

A programot több beállítással is futtattuk, egy a $\pi/2$ -nél kicsit kisebb, számítógépen pontosan ábrázolható α értékkel is. Ezen tesztek eredményéből azt a következtetést vontuk le, hogy a számításokhoz szükséges pontosság ekkor legalább 10^{-500} , és a szükséges CPU idő több mint 100 nap. Elméletileg a $\pi/2$ értékre is lehetne igazolni az állítást. A $\pi/2$ környezetében megjelenő periodikus pályák szélsőértékei ugyanis kicsik. Az ezekhez tartó megoldások esetében is létezhet egy megfelelő 1 hosszú szakasz. Ebben az esetben a $\pi/2$ értéket befoglaló intervallummal számolva igazolható a kérdés.

Összefoglalva, a feladat bizonyítása a teljes $\alpha = [1.5, \pi/2]$ intervallumra az óriási CPU idő miatt ezzel a módszerrel egyelőre nem lehetséges, bár a program az intervallum bármely pontjára, illetve annak szűk intervallumára is képes matematikai bizonyítást adni. A tapasztalatok alapján ha α tart a $\pi/2$ -höz, akkor a probléma egyre nehezebb, de a trajektóriák viselkedése hasonló marad. Ha nincs az $[1.5, \pi/2]$ intervallumon belül szokatlanul viselkedő rész, akkor az intervallum bármely pontjára, illetve annak egy elegendően szűk intervallumára képesek vagyunk matematikai bizonyítást adni.

A tárgyalt módszer alkalmazható lehet egyéb késleltetett differenciálegyenletek vizsgálatakor is.

4.2. A sejtés bizonyítása

4.2.1. Wright módszerén alapuló bizonyítás az $\alpha \leq 1.0$ esetre

Tekintsük a Wright-féle késleltetett differenciálegyenletet az alábbi formában:

$$y'(t) = -\alpha (e^{y(t-1)} - 1). \quad (4.5)$$

Bizonyítani fogjuk, hogy nem létezik a konstans nullán kívül más periodikus pálya. Abban az esetben, ha nem létezik ilyen, a konstans 0-tól eltérő periodikus

pálya, akkor egyéb eredményekből tudjuk, hogy a számunkra érdekes esetekben nullához fog tartani a megoldás. A periodikus pályák nem létezését indirekten fogjuk bizonyítani.

Kezdetben vegyük észre a differenciálegyenlet trajektóriájának néhány hasznos tulajdonságát. Tételezzük fel, hogy létezik periodikus pálya és tekintsünk egy ilyen. Ha $y(t-1) < 0$ és $\alpha > 0$, akkor a (4.5) képletből következik, hogy $y'(t) > 0$. Pozitív derivált esetén kétfajta trajektória lehetséges: a függvény nem marad végtelen hosszú ideig a negatív tartományban, vagy alulról konvergál egy nem pozitív számhoz. Mivel egy periodikus megoldást tekintünk, így csak az első eset lehetséges. Ha $y(t-1) > 0$ és $\alpha > 0$, akkor az $y'(t) < 0$. Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy a pozitív tartományban sem maradhat végtelen hosszú ideig egy periodikus megoldás. Az utóbb két észrevételből következik, hogy a periodikus pályának a nulla pont körül kell oszcillálniuk. Feltehetjük, hogy a periodikus pálya szélsőértékei M (olvasd: „nagyem”), illetve $(-m)$ (olvasd: „kisem”) ($M, m > 0$), azaz a függvény minden t időpontjára igaz, hogy

$$(-m) \leq y(t) \leq M. \quad (4.6)$$

Mivel a függvény a nulla körül oszcillál, így létezik olyan zéruspontja, melynek környezetében $y(t)$ előjelt vált. Legyen t_0 egy ilyen időpillanat, azaz $y(t_0) = 0$ és legyen a függvény t_0 előtt negatív, míg t_0 után pedig pozitív. A (4.5) képletből következik, hogy a $(t_0 + 1)$ pontban az $y'(t)$ előjelet vált. Ezen tulajdonság miatt a $(t_0 + 1)$ pont egy maximumpont, azaz $y(t_0 + 1) = M$. Az előző gondolatmenethez hasonlóan látható, hogy ha az $y(t_0) = 0$ és a t_0 környezetében $y'(t) < 0$, akkor $y(t_0 + 1) = -m$, mely egy minimumpont.

Először ismerjük meg Wright bizonyításának [72] lényegét az $\alpha \leq 1.0$ esetben. Vizsgáljuk meg, milyen feltételeket kaphatunk a periodikus pálya szélsőértékeire.

4.8. Állítás. *A periodikus pályák szélsőértékeire az alábbiak igazak:*

$$1. \quad M \leq -\alpha(e^{-m} - 1); \quad (4.7)$$

$$2. \quad m \leq \alpha(e^M - 1). \quad (4.8)$$

Bizonyítás. Tekintsük azt az esetet, amikor az $y(t_0 + 1) = M$. Ekkor az $y(t_0) = 0$ és $y(t_0 + 1) = M$, így az alábbi egyenlőséget írhatjuk fel:

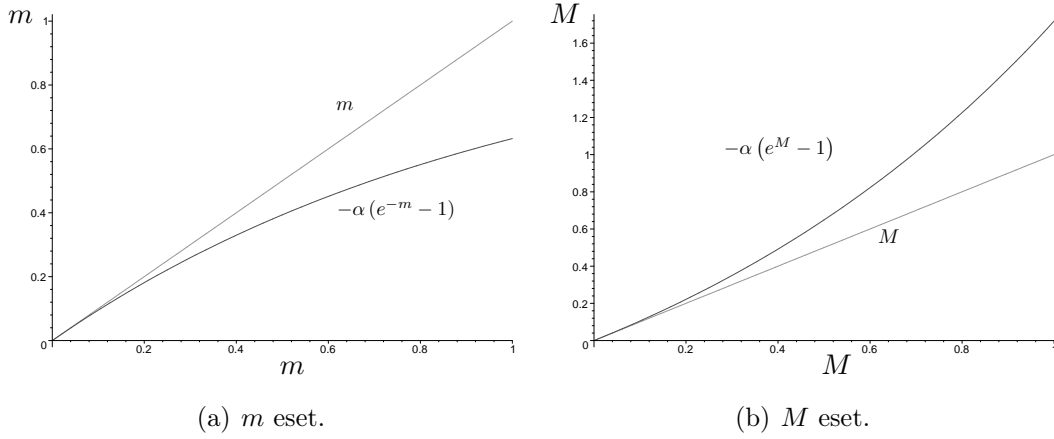
$$M = y(t_0 + 1) - y(t_0).$$

A Riemann-integrál használatával:

$$y(t_0 + 1) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+1} y'(t) dt.$$

Az utóbbi két egyenletből:

$$M = \int_{t_0}^{t_0+1} y'(t) dt.$$

4.3. ábra. Korlátok az $\alpha = 1.0$ esetben.

Behelyettesítve a (4.5) összefüggést, az

$$M = -\alpha \int_{t_0}^{t_0+1} e^{y(t-1)} - 1 \, dt = -\alpha \int_{t_0-1}^{t_0} e^{y(t)} - 1 \, dt \quad (4.9)$$

egyenlőséget kapjuk. Mivel a $(-m)$ a periodikus megoldás szélsőértéke, így tudjuk, hogy $y(t) \geq -m$, azaz $e^{y(t)} - 1 \geq e^{-m} - 1$. Ezt az egyenlőtlenséget a (4.9) összefüggésbe behelyettesítve az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$M \leq -\alpha (e^{-m} - 1).$$

A m esetében hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy:

$$m \leq \alpha (e^M - 1).$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

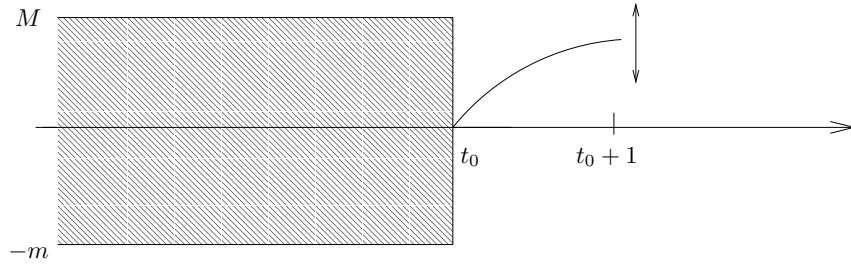
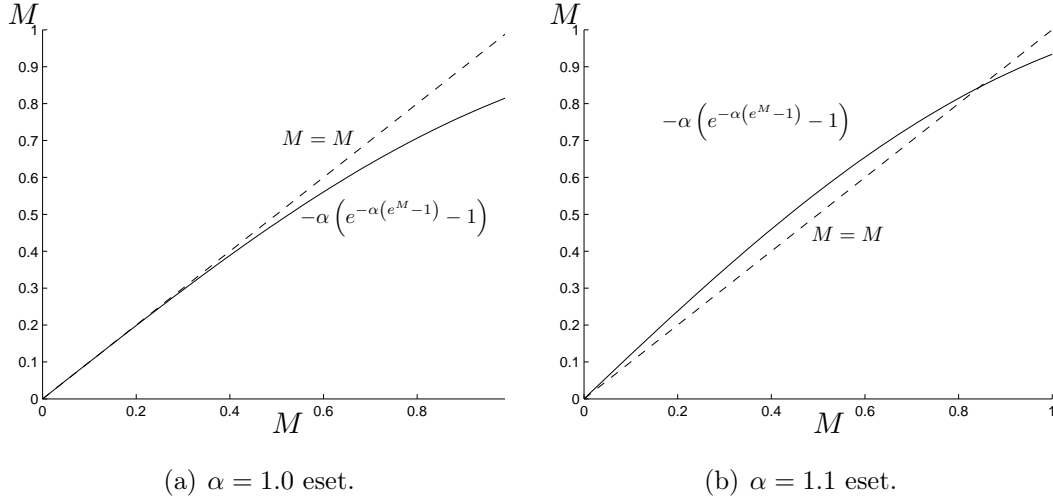
A 4.3. ábrán láthatjuk az állítás összefüggéseit az $\alpha = 1.0$ esetben. A 4.4. ábra a függvény alakulását mutatja a $(t_0 + 1)$ időpontig. A függvény a t_0 pont előtt a satírozott területben kell, hogy legyen. A t_0 időpillanatban a függvény értéke nulla. Ha a t_0 előtti szakaszt $(-m)$ -mel becsüljük, akkor az integráláskor a t_0 utáni résznek egy felső becslését kapjuk. A feltétel szerint a $(t_0 + 1)$ időpillanatban ezen felső becslésnek legalább M -nek kell lennie.

Mint látható, a M értékére felső korlátot ad m , és fordítva. A (4.7) feltételbe behelyettesítve a (4.8) feltételt egy felső korlátot kapunk M -re M függvényében:

$$M \leq -\alpha (e^{-\alpha(e^M - 1)} - 1). \quad (4.10)$$

Ezt a M -et korlátozó függvényt a 4.5. ábrán láthatjuk. (A megfelelő behelyettesítéssel egy hasonló összefüggést kaphatunk m -re.)

Ez a feltétel bármilyen periodikus pályára igaz, azaz olyan M -et kell találni, mely esetén a jobb oldal nem ad kisebbet, mint M . A 4.5(a) ábrán látható, hogy az $\alpha \leq 1.0$ esetben csak a $M = 0$ elégíti ki ezt a feltételt, amiből következik az is, hogy $m = 0$. A 4.5(b) ábrából sejthető, hogy az $\alpha > 1.0$ esetben léteznek olyan $M, m > 0$ számok is, melyekre igazak a megfelelő feltételek. Ezeket az észrevételeket Wright elméleti eszközökkel bizonyította.

4.4. ábra. A bizonyítás lényege az $\alpha \leq 1.0$ esetben.4.5. ábra. Korlátok M -re különböző α értékek mellett.

4.2.2. Wright módszerén alapuló bizonyítás az $\alpha \leq 1.5$ esetre

Wright erősebb feltételeket is adott a periodikus pálya szélsőértékeire. Ezek segítségével a sejtést bizonyította az $\alpha \leq 1.5$ esetre is. A továbbiakban ezen, erősebb feltételek levezetését ismertetjük.

4.9. Állítás. *A periodikus pályák szélsőértékeire az alábbiak igazak:*

$$1. \quad \text{ha } -m \geq \alpha(e^{-m} - 1), \text{ akkor } M \leq -\alpha(e^{-m} - 1) + (-m)\frac{e^{-m}}{e^{-m}-1} - 1; \quad (4.11)$$

$$2. \quad M \leq \alpha - \frac{1-e^{\alpha(e^{-m}-1)}}{e^{-m}-1}; \quad (4.12)$$

$$3. \quad m \leq \alpha(e^M - 1) - M\frac{e^M}{e^M-1} + 1. \quad (4.13)$$

Bizonyítás. Tekintsük a (4.5) egyenletet és a (4.6) korlátokat, ezeket összevetve az alábbi korlátokat kapjuk az első deriváltra:

$$-\alpha(e^M - 1) \leq y'(t) \leq -\alpha(e^{-m} - 1),$$

minden t -re. Mivel azt tudjuk, hogy $y(t_0) = 0$, így az alábbi korlátokat adhatjuk a függvényre a $t \in [-\infty, t_0]$ intervallumon:

$$y(t) \leq y(t_0) + (-\alpha(e^M - 1))(t - t_0),$$

és

$$y(t) \geq y(t_0) + (-\alpha(e^{-m} - 1))(t - t_0).$$

Átrendezve, és újból felhasználva a (4.6) korlátokat:

$$\max \{ \alpha(e^{-m} - 1)(t_0 - t), -m \} \leq y(t) \leq \min \{ \alpha(e^M - 1)(t_0 - t), M \},$$

minden $t \in [-\infty, t_0]$ -ra. Most használjuk ezeket az erősebb korlátokat a m és M becslésére. Tekintsük a (4.9) egyenletet ezen új erősebb korlátokkal:

$$M = -\alpha \int_{t_0-1}^{t_0} e^{y(x)} - 1 \, dt \leq -\alpha \int_{t_0-1}^{t_0} e^{\max \{ \alpha(e^{-m}-1)(t_0-t), -m \}} - 1 \, dt.$$

A maximum meghatározásakor az alábbi egyenlőséget kell megvizsgálni:

$$\alpha(e^{-m} - 1)(t_0 - t) = -m.$$

Az $\alpha(e^{-m} - 1) \neq 0$, így az előző egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy $(t_0 - t) = \frac{-m}{\alpha(e^{-m}-1)}$, amit jelöljünk \bar{t} -sal. A minimumképzést nézve két eset lehetséges:

1. $0 \leq \bar{t} \leq 1$ (azaz $-m \geq \alpha(e^{-m} - 1)$), mely esetben mind a két tag szükséges a maximum meghatározásához, és $\bar{t} = \frac{-m}{\alpha(e^{-m}-1)}$ esetén egyenlő a két tag.
2. $\bar{t} > 1$ (azaz $-m < \alpha(e^{-m} - 1)$), mely esetben minden $t \in [t_0 - 1, t]$ -re az első tag lesz a nagyobb a maximumképzésben.

Az első esetben a $\bar{t} = \frac{-m}{\alpha(e^{-m}-1)}$ egyenlőséget és a $-m \geq \alpha(e^{-m} - 1)$ egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} M &\leq -\alpha \int_{t_0-1}^{t_0} e^{\max \{ \alpha(e^{-m}-1)(t_0-t), -m \}} - 1 \, dt = \\ &= -\alpha \int_{t_0-1}^{t_0-\bar{t}} e^{-m} - 1 \, dt - \alpha \int_{t_0-\bar{t}}^{t_0} e^{\alpha(e^{-m}-1)(t_0-t)} - 1 \, dt = \\ &= -\alpha(e^{-m} - 1)(1 - \bar{t}) - \alpha \frac{1 - e^{\alpha(e^{-m}-1)}}{\alpha(e^{-m} - 1)} + \alpha\bar{t} = \\ &= -\alpha(e^{-m} - 1) \left(1 - \frac{-m}{\alpha(e^{-m} - 1)} \right) + \frac{1 - e^{\alpha(e^{-m}-1)}}{(e^{-m} - 1)} + \alpha \frac{-m}{\alpha(e^{-m} - 1)} \leq \\ &\leq -\alpha(e^{-m} - 1) - m + \frac{1 - e^{-m}}{(e^{-m} - 1)} + \frac{-m}{(e^{-m} - 1)} = \\ &= -\alpha(e^{-m} - 1) - \frac{m(e^{-m} - 1)}{(e^{-m} - 1)} + \frac{-m}{(e^{-m} - 1)} - 1 = \\ &= -\alpha(e^{-m} - 1) - m \frac{e^{-m}}{(e^{-m} - 1)} - 1. \end{aligned}$$

Összegezve az utóbbi levezetést:

$$\text{ha } -m \geq \alpha(e^{-m} - 1), \text{ akkor } M \leq -\alpha(e^{-m} - 1) - m \frac{e^{-m}}{e^{-m} - 1} - 1.$$

A maximumképzés másik esetét nézve mindig csak az első tagot használjuk, azaz:

$$\begin{aligned} M &\leq -\alpha \int_{t_0-1}^{t_0} e^{\max\{\alpha(e^{-m}-1)(t_0-t), -m\}} - 1 \, dt = \\ &= -\alpha \int_{t_0-1}^{t_0} e^{\alpha(e^{-m}-1)(t_0-t)} - 1 \, dt = -\alpha \frac{1 - e^{\alpha(e^{-m}-1)}}{\alpha(e^{-m} - 1)} + \alpha = \\ &= \alpha - \frac{1 - e^{\alpha(e^{-m}-1)}}{e^{-m} - 1}. \end{aligned}$$

Mivel a becslések során nem használtuk ki, hogy $-m < \alpha(e^{-m} - 1)$, így a megadott korlát minden esetben igaz. Összegezve a második esetet:

$$M \leq \alpha - \frac{1 - e^{\alpha(e^{-m}-1)}}{e^{-m} - 1}.$$

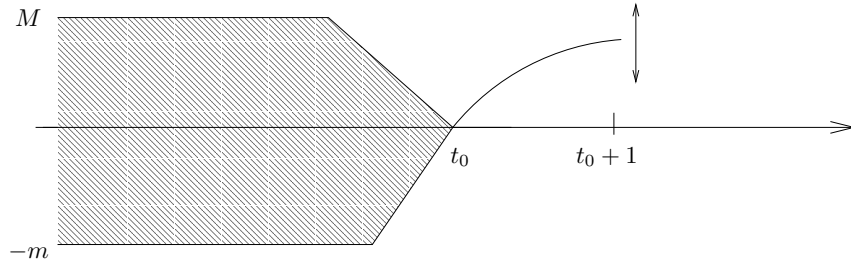
A m -re hasonló gondolatmenetet követve, szintén kaphatunk becslést. Ebben az esetben a minimumképzésben mindig az első esetet kell figyelembe venni, mivel a $M \leq \alpha(e^M - 1)$, minden $M \geq 0$ -ra. Összegezve a m esetét, az teljesül, hogy:

$$m \leq \alpha(e^M - 1) - M \frac{e^M}{e^M - 1} + 1.$$

Ezzel az állítás mindhárom részét bizonyítottuk. ■

A 4.4. ábrához hasonlóan a jelen bizonyítás lényegét a 4.6. ábra illusztrálja. A M esetén két különböző korlátot kaptunk ((4.11), (4.12)). A derivált segítségével a periodikus megoldásra kapott új korlát, és az eredeti $y(t) \geq -m$ -es korlát metszéspontjának elhelyezkedése alapján kaptuk a tárgyalt két esetet. Kis m -ek esetén a metszéspont a $(t_0 - 1)$ után van, ekkor kaptuk a (4.11) esetet. Ha a metszéspont a $(t_0 - 1)$ -nél korábban van, akkor a deriváltból jövő korlátot használtuk, így kaptuk a (4.12) korlátot. A m becslése esetén a t_0 pont előtti függvényre adott korlátok mindig a $(t_0 - 1)$ pont után metszik egymást, ezért csak az első eset alkalmazható.

A 4.5. ábrán látható, hogy csak kicsi M és kicsi m esetén nem működött az $\alpha \leq 1.0$ esetben használt módszer. Ezért vizsgáljuk meg külön ezt az esetet. Kicsi m esetén a $-m \geq \alpha(e^{-m} - 1)$ igaz, és a (4.11) korlátot használhatjuk. Azaz alkalmazzuk egymás után a (4.11) és a (4.13) korlátokat. Ezzel egy korlátot kapunk a M értékére a M függvényében. A 4.7. ábrából sejthető, hogy ez a korlát csak az $\alpha = 1.5$ -ig igazolja a sejtést. Ha nagyobb α -ra is bizonyítani akarjuk a sejtést, akkor még erősebb korlátokat kell kidolgoznunk.

4.6. ábra. A bizonyítás lényege az $\alpha \leq 1.5$ esetben.

4.2.3. A periodikus pályák további számítható korlátai

Tekintsünk egy tetszőleges $y(t)$ periodikus megoldást. Vegyük a görbe t_0 zéruspontjai és a $(t_0 + 1)$ maximumpontok közötti részeit. Az ilyen egységnyi hosszú, monoton növekvő részeket nevezzük „ $(inc, 1)$ ”-nek. Ezután tekintsük a függvény csökkenő részét a következő zéruspontig, melyek hosszát nem tudjuk pontosan meghatározni. Ezeknek a szakaszoknak a neve legyen „ (dec, n) ”. Az előzőekhez hasonlóan az egy hosszúságú csökkenő részeket „ $(dec, 1)$ ”-nek és az utána következő növekvő részeket „ (inc, n) ”-nek nevezzük.

Definiáljuk az alábbi korlátfüggvényeket az $y(t)$ -re:

$y_{(dec,n)}^{(upper)}(t)$: felső korlát a $t'_0 - 1 \leq t \leq t'_0$ esetben,

$y_{(inc,n)}^{(lower)}(t)$: alsó korlát a $t''_0 - 1 \leq t \leq t''_0$ esetben,

$y_{(inc,1)}^{(upper)}(t)$: egy felső korlát a $t_0 \leq t \leq t_0 + 1$ esetben,

$y_{(dec,1)}^{(lower)}(t)$: alsó korlát a $t'_0 \leq t \leq t'_0 + 1$ esetben.

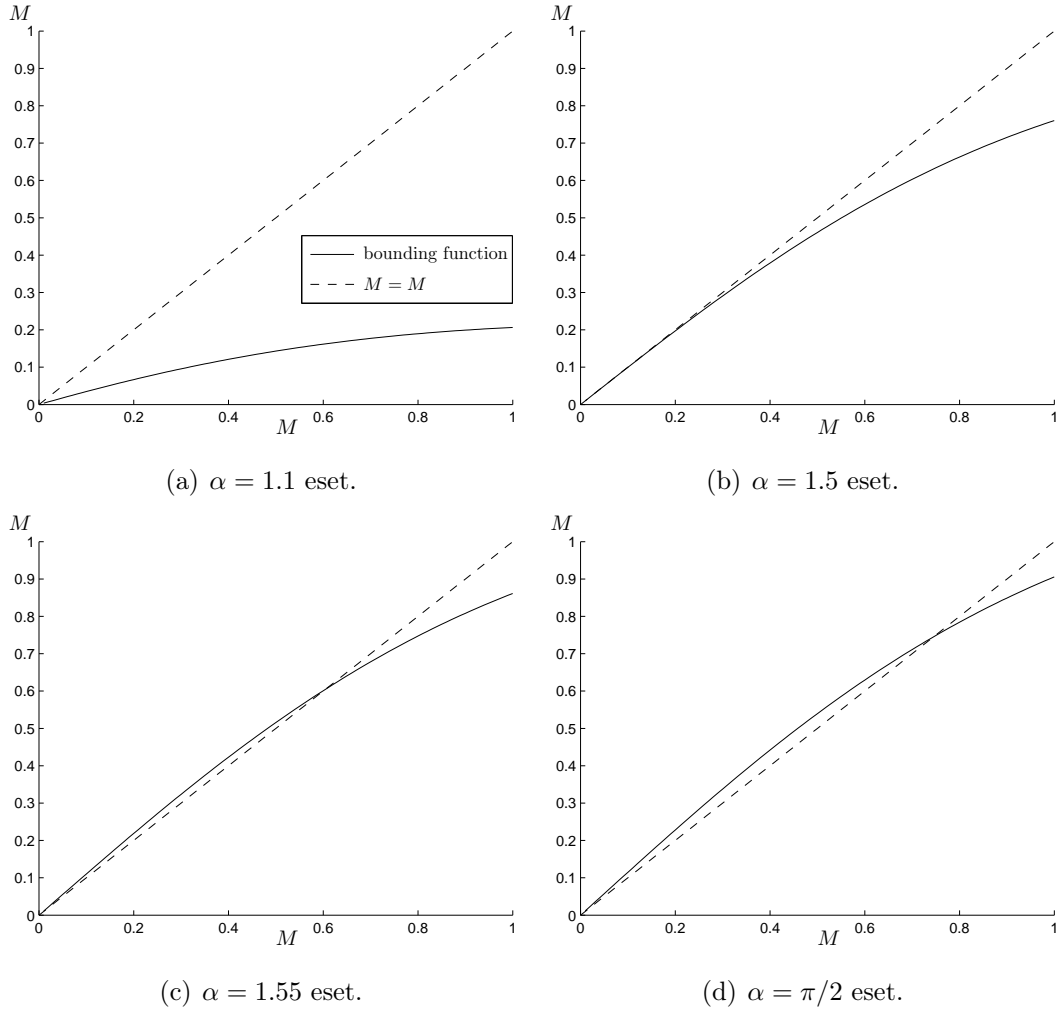
$y_{(inc,1)}^{(lower)}(t)$: alsó korlát a $t_0 \leq t \leq t_0 + 1$ esetben,

$y_{(dec,1)}^{(upper)}(t)$: felső korlát a $t'_0 \leq t \leq t'_0 + 1$ esetben.

A definíció szerint ezen y függvények korlátot adnak a megfelelő részen a periodikus megoldásra. A t_0 , t'_0 és t''_0 legyenek rendre egymást követő zéruspontjai a periodikus megoldásnak. Mivel a vizsgált megoldás periodikus, így t_0 -t tetszőleges olyan zéruspontnak tekinthetjük, amelyben a függvény monoton nő.

Tudjuk, hogy a periodikus megoldás $(dec, 1)$ és $(inc, 1)$ szakaszai egységnyi hosszúak, míg a (dec, n) és az (inc, n) szakaszcsoportokról nem ismert hasonló információ. Ezeknek a szakaszoknak a hossza legyen rendre p_M , illetve p_m . Ekkor $(1 + p_M)$ és $(1 + p_m)$ a két zéruspont közötti távolság, azaz a $t'_0 = (t_0 + 1 + p_M)$ és a $t''_0 = (t'_0 + 1 + p_m)$.

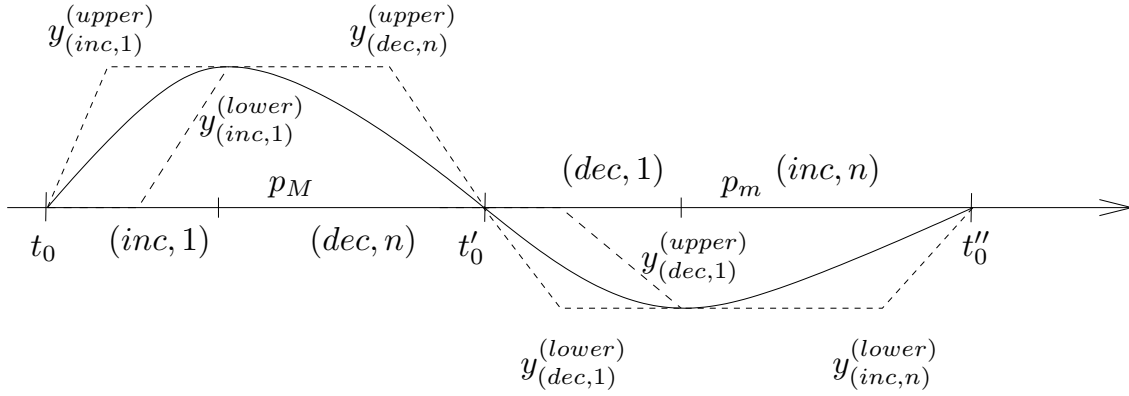
Mivel a (dec, n) és (inc, n) hosszát nem ismerjük, így a $(p_M - 1)$, illetve a $(p_m - 1)$ előjelét sem ismerjük. Több felső korlát is ismert rájuk, de ezek számunkra nem használhatók. Ezen p értékekre jelen esetünkben csak az 1 körüli értékek lesznek ideálisak, így felmerülhet a kérdés, hogy egyáltalán létezhetnek-e számunkra

4.7. ábra. Erősebb korlátok M -re különböző α értékek mellett.

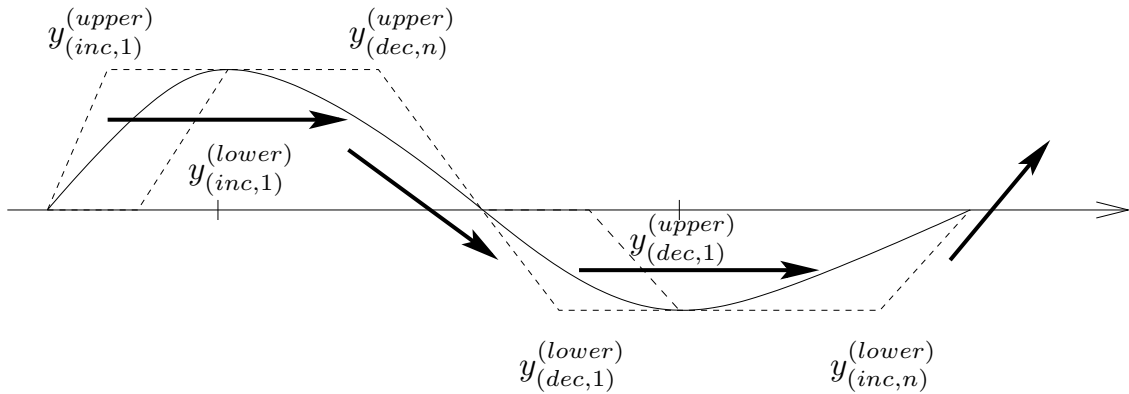
jól használható értékek erre a két paraméterre. Várható, hogy igen, mivel a $\pi/2$ -nél egy 4 hosszú periódus jelenik meg. Egy teljes periódusról pedig tudjuk, hogy $(1 + p_m + 1 + p_M)$ hosszú, így a $(p_m + p_M)$ -re egy 2-höz közeli értéket kaphatunk. Tehát a $(p_m$ és a $p_M)$ értékek várhatóan 1 körüliek.

Ezen hat korlátfüggvényből levezetünk hasonló, de erősebb, szűkebb halmazt megengedő korlátfüggvényeket. Az újonnan kapott korlátfüggvényeket az eredetiekkel összevetve erősebb korlátfüggvényt kaphatunk. Az $y_{(inc,1)}^{(upper)}$ -ből és az $y_{(inc,1)}^{(lower)}$ -ből levezetünk egy új helyes $y_{(dec,n)}^{(upper)}$ korlátot, valamint az $y_{(dec,n)}^{(upper)}$ -ből egy-egy korlátot az $y_{(dec,1)}^{(lower)}$ -re és az $y_{(dec,1)}^{(upper)}$ -re. Ezután levezetünk hasonló módszerrel korlátokat az $y_{(inc,n)}^{(lower)}$ -re az $y_{(dec,1)}^{(lower)}$ -ből és az $y_{(dec,1)}^{(upper)}$ -ből, valamint az $y_{(inc,1)}^{(upper)}$ -re és az $y_{(inc,1)}^{(lower)}$ -re az $y_{(inc,n)}^{(lower)}$ -ből. Összefoglalva:

$$\left\{ \begin{array}{c} y_{(inc,1)}^{(upper)} \\ y_{(inc,1)}^{(lower)} \end{array} \right\} \Rightarrow y_{(dec,n)}^{(upper)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_{(dec,1)}^{(lower)} \\ y_{(dec,1)}^{(upper)} \end{array} \right\} \Rightarrow y_{(inc,n)}^{(lower)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_{(inc,1)}^{(upper)} \\ y_{(inc,1)}^{(lower)} \end{array} \right\}.$$



4.8. ábra. A periodikus megoldást korlátozó függvények (szaggatott vonallal jelölve).



4.9. ábra. A korlátok összefüggései.

Az előző korlát javítási sorrendet mutatja a 4.9. ábra. Ezeket az összefüggéseket sorban egymás után alkalmazzuk, és mivel periodikus megoldást vizsgálunk, így az eredményül kapott korlátokat használhatjuk az iterációban indulási korlátokként is. Mutatunk helyes, pontosabb korlátfüggvényeket, majd ezeket alkalmazva a létrejött korlátsorozatról belátjuk, hogy annak bármely eleme érvényes korlát.

Kezdetben vehetjük az $y_{(dec,1)}^{(upper)}$ -et és a $y_{(inc,1)}^{(lower)}$ -et azonosan 0-nak, míg a további felső korlátokat azonosan M -nek és az alsó korlátokat azonosan $(-m)$ -nek. Az $(inc, 1)$ részen az $y(t_0 + 1)$ pontban a függvény értékéről azt tudjuk, hogy az a M értéket veszi fel, így az $y_{(inc,1)}^{(upper)}$ függvényértéknek a $(t_0 + 1)$ pontban M -nél nagyobb-nak vagy egyenlőnek kell lennie $\left(y_{(inc,1)}^{(upper)}(t_0 + 1) \geq M\right)$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $y_{(dec,1)}^{(lower)}(t'_0 + 1) \leq -m$ -nek is teljesülnie kell. Abban az esetben, ha ezen egyenlőtlenségek valamelyike nem teljesül a megoldás függvényre, akkor nem létezhet ilyen szélsőértékekkel periodikus pálya.

Látható majd, hogy a (dec, n) szakaszon nincs szükség alsó, míg az (inc, n) szakaszon felső korlátok kiszámítására. Köztes számítások során kapni fogunk ilyen korlátokat, de ezeket nem használjuk ki, így nem térünk ki ezek vizsgálatára.

4.2.4. A megoldás erősebb korlátjai az 1 hosszú szakaszokon

Kezdetben adjunk meg korrekt $y_{(inc,1)}^{(upper)}$ és $y_{(dec,1)}^{(lower)}$ korlátozó függvényeket a t_0 és t'_0 előtti értékekből. Ez az elv Wright korábban említett módszerén alapul.

4.10. Állítás. *Az alábbi módon definiált korlátfüggvények helyesek:*

$$y_{(inc,1)}^{(upper)}(t) = \min \left\{ \begin{array}{c} y_{(inc,1)}^{(upper)}(t) \\ -\alpha \int_{t_0-1}^{t-1} e^{y_{(inc,n)}^{(lower)}(x)} - 1 \, dx \end{array} \right\}, \text{ ha } t \in [t_0, t_0 + 1], \quad (4.14)$$

$$\bar{y}_{(dec,1)}^{(lower)}(t) = \max \left\{ \begin{array}{c} y_{(dec,1)}^{(lower)}(t) \\ -\alpha \int_{t'_0-1}^{t-1} e^{y_{(dec,n)}^{(upper)}(x)} - 1 \, dx \end{array} \right\}, \text{ ha } t \in [t'_0, t'_0 + 1]. \quad (4.15)$$

Bizonyítás. A bizonyításban először megmutatjuk, hogy az $y_{(inc,n)}^{(lower)}(t)$ függvényből hogyan kaphatunk a periodikus pályára egy felső korlátot az $(inc, 1)$ intervallumon. Mivel az $y_{(inc,n)}^{(lower)}$ egy alsó korlátot adó függvény, így teljesül, hogy

$$y_{(inc,n)}^{(lower)}(t) \leq y(t), \text{ minden } t \leq t_0\text{-ra.} \quad (4.16)$$

Integráljuk az y' -t t_0 -tól t -ig ($t_0 \leq t \leq t_0 + 1$). Ekkor a Riemann-integrált felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$y(t) - y(t_0) = -\alpha \int_{t_0}^t e^{y(x-1)} - 1 \, dx = -\alpha \int_{t_0-1}^{t-1} e^{y(x)} - 1 \, dx.$$

A $y(x)$ becsléséhez használjuk fel a (4.16) becslést:

$$y(t) - y(t_0) = -\alpha \int_{t_0-1}^{t-1} e^{y(x)} - 1 \, dx \leq -\alpha \int_{t_0-1}^{t-1} e^{y_{(inc,n)}^{(lower)}(x)} - 1 \, dx.$$

Az eredeti és az újonnan kapott korlátokat összevetve kapjuk az állításban szereplő újabb, erősebb $y_{(inc,1)}^{(upper)}$ korlátot a $t \geq t_0$ esetben.

Hasonlóan kaphatunk egy jobb korlátot az $y_{(dec,1)}^{(lower)}$ -re, mellyel az állítást igazoltuk. ■

Most vizsgáljuk meg, hogy milyen módon kaphatunk egy helyes alsó korlátot az $(inc, 1)$ -en, illetve egy felső korlátot a $(dec, 1)$ -en.

4.11. Állítás. *Az alábbi módon definiált korlátfüggvények helyesek:*

$$\bar{y}_{(inc,1)}^{(lower)}(t) = \max \left\{ \begin{array}{c} y_{(inc,1)}^{(lower)}(t) \\ M + \alpha \int_{t-1}^{t_0} e^{y_{(inc,n)}^{(lower)}(x)} - 1 \, dx \end{array} \right\}, \text{ ha } t \in [t_0, t_0 + 1], \quad (4.17)$$

$$\bar{y}_{(dec,1)}^{(upper)}(t) = \min \left\{ \begin{array}{c} y_{(dec,1)}^{(upper)}(t) \\ -m + \alpha \int_{t-1}^{t'_0} e^{y_{(dec,n)}^{(upper)}(x)} - 1 \, dx \end{array} \right\}, \text{ ha } t \in [t'_0, t'_0 + 1]. \quad (4.18)$$

Bizonyítás. Integráljuk az y' függvényt a t -től $(t_0 + 1)$ -ig ($t \in [t_0, t_0 + 1]$):

$$\begin{aligned} y(t_0 + 1) - y(t) &= -\alpha \int_t^{t_0+1} e^{y(x-1)} - 1 \, dx = -\alpha \int_{t-1}^{t_0} e^{y(x)} - 1 \, dx \leq \\ &\leq -\alpha \int_{t-1}^{t_0} e^{y_{(inc,n)}^{(lower)}(x)} - 1 \, dx. \end{aligned}$$

Mivel $y(t_0 + 1) = M$, így az állításban szereplő jobb korlátot kapjuk az $y_{(inc,1)}^{(lower)}$ -re.

Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk a jobb felső korlátot az $y_{(dec,1)}^{(upper)}$ -re is, mellyel az állítást igazoltuk. ■

Tehát az $y_{(dec,n)}^{(upper)}$ -ből kaphatunk egy helyes erősebb $y_{(dec,1)}^{(upper)}$, illetve $y_{(dec,1)}^{(lower)}$ korlátfüggvényt, míg az $y_{(inc,n)}^{(lower)}$ -ből kaphatunk egy erősebb $y_{(inc,1)}^{(upper)}$, illetve $y_{(inc,1)}^{(lower)}$ korlátfüggvényt.

4.2.5. A periodikus pályák hossza

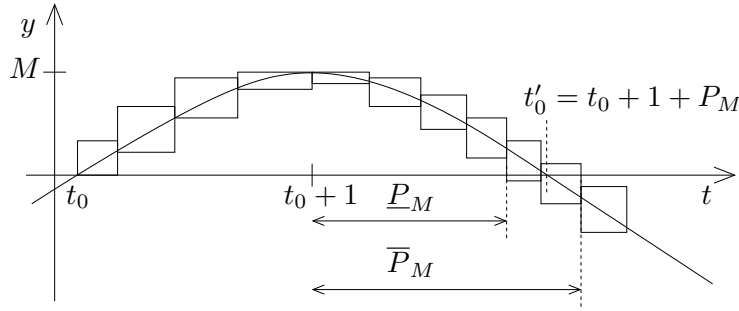
A vizsgálatainkban fontos szerepe van a (dec, n) és az (inc, n) nem 1 hosszú szakaszok hosszának, azaz a p_m , illetve p_M értékeknek. Ezek nagyságára adunk egy garantált befoglalást. Ezen eljárás eredményeként kapunk a maximumhely és minimumhely utáni szakaszra egy felső, illetve alsó korlátot a megoldásra.

A p_m , illetve p_M értékek befoglalását a trajektória követésével határozzuk meg. Tudjuk, hogy a Lagrange-féle maradéktaggal ellátott Taylor-polinom az alábbi formában alkalmazható a trajektória követésére ($n = 1$ eset, Euler-módszer):

$$Y(x) = Y(x_0) + Y^{(1)}([x_0, x])(x - x_0),$$

$$Y([x_0, x]) = Y(x_0) + Y^{(1)}([x_0, x])([0, x - x_0]).$$

Vegyük észre, hogy a trajektória követéséhez szükségünk van 1 hosszan a trajektória befoglalására, valamint a végpontban a függvényérték befoglalására. Ezekre az információkra támaszkodva már követni tudjuk a trajektóriát.



4.10. ábra. A trajektória követése a következő zérushely megtalálása céljából.

Mivel az $(inc, 1)$ szakaszon ismert egy alsó és egy felső korlát a periodikus megoldásnak, így az $(inc, 1)$ szakaszokra ismert egy garantált befoglalása ezen megoldásnak. A $(t_0 + 1)$ pontban a függvény értéke M . Hasonlóan a $(dec, 1)$ -re is megkaphatjuk ezen szükséges információkat. Ezek az adatok elegendőek a trajektória megbízható követéséhez.

Most nézzük meg, hogy hogyan kaphatunk meg egy befoglalást a p_m és a p_M értékekre a trajektória követése során. Ezen követés a $(t_0 + 1)$, illetve $(t'_0 + 1)$ pontból indul. A trajektória befoglalása valamelyik lépésben tartalmazni fogja a nullát. Ekkor az eddigi trajektóriakövetés hossza a p_M , illetve a p_m értékek alsó korlátja lesz. Az várható, hogy a trajektóriát tovább követve, a befoglalás egy idő múlva nem fogja tartalmazni a nullát. Az eddig eltelt idő egy felső korlátot ad a p_m , illetve a p_M értékekre. Ezt a gondolatmenetet láthatjuk megjelenítve a 4.10. ábrán.

Elméleti eredményekből tudjuk, hogy ezen értékek nem lehetnek nagyobbak 2-nél, így ha a követés a $(t_0 + 1)$ ponttól hosszabb lenne mint 2, akkor befejezhetjük a követést, és a megfelelő p érték felső korlátja 2. Ebből az is következik, hogy egy megbízható eljárás az alsó korlátra sem adhat 2-nél nagyobb értéket.

Jelöljük a p_m -re adott befoglalást P_m -mel, illetve p_M -ét P_M -mel, a P_m intervallum alsó és felső végpontjait \underline{P}_m -mel és \overline{P}_m -mel, valamint a P_M intervallum alsó és felső végpontjait \underline{P}_M -mel, illetve \overline{P}_M -mel.

4.2.6. A megoldás erősebb korlátjai a nem 1 hosszú szakaszokon

Tekintsük első megközelítésben a (dec, n) szakaszt. Korábbi ismereteink alapján van egy felső korlátunk az $(inc, 1)$ szakaszon. A trajektóriakövetés eredményéből pedig kapunk egy felső korlátot a t_0 utáni szakaszra, melyet az 1 hosszú szakaszok becsléseiből és a trajektória követéséből kapunk. Definíció szerint azonban az $y_{(dec, n)}^{(upper)}$ a következő zéruspont (t'_0) előtti részére ad felső korlátot. Mivel nem tudjuk a p_M pontos értékét, így e követést nem tudjuk közvetlenül felhasználni. Ezért azt szükséges megvizsgálni, hogy a t_0 utáni részt hol használhatjuk a t'_0 előtti részen. Továbbá az 1 hosszú szakaszok erősebb korlátainak számítása során csak a $[t'_0 - 1, t'_0]$ intervallumot használjuk, azaz a t'_0 előtt lévő szakaszon a periodikus megoldás korlátjait csak

a $[t'_0 - 1, t'_0]$ intervallumon kell ismerni. Ismertetünk egy a Wright ötletén alapuló lehetőséget a távolabbi felső korlátok kihasználására a hasznos intervallumon.

4.12. Állítás. *A P_M számítása során keletkezett trajektória befoglalás $[t_0, t_0 + 1]$ részét használhatjuk a*

$$[t'_0 - (\overline{P}_M + 1), t'_0 - \overline{P}_M]$$

intervallumon, míg a $[t_0 + 1, t_0 + 1 + \underline{P}_M]$ részét a

$$[t'_0 - \underline{P}_M, t'_0]$$

intervallumon egy t'_0 előtti korlátfüggvény meghatározásához, ahol t'_0 a következő zéruspont, azaz a $(t_0 + 1 + p_M)$ időpont.

Bizonyítás. Tekintsük a trajektória befoglalását a $[t_0, t_0 + 1 + \overline{P}_M]$ szakaszokon. Ez tartalmazza a trajektóriakövetés kezdőpontja előtti 1 hosszú szakaszon is a befoglalást. A trajektória követés eredményét jelöljük $Y(t)$ -vel, a felső határát pedig $\overline{Y}(t)$ -vel.

Egy tetszőleges monoton növekvő függvény esetében tudjuk, hogy

$$y(t) \geq y(t - \Delta t), \text{ ha } \Delta t \geq 0.$$

Hasonlóan, egy monoton csökkenő függvényre az teljesül, hogy:

$$y(t) \geq y(t - \Delta t), \text{ ha } \Delta t \leq 0.$$

A trajektóriáról tudjuk, hogy az $(inc, 1)$ és az (inc, n) intervallumokon szigorúan monoton növekvő, míg a $(dec, 1)$ és a (dec, n) intervallumokon szigorúan monoton csökkenő.

Vegyük azt az $(inc, 1)$ szakaszt, amelyen a megoldás szigorúan monoton növekvő. Itt a trajektóriakövetés során használt kezdeti $y_{(inc,1)}^{(upper)}$ -ből kapunk egy felső korlátot, azaz az $\overline{Y}(t)$ egy felső korlát lesz a periodikus pályára a $[t_0, t_0 + 1]$ intervallumon. Mivel $p_M \leq \overline{P}_M$, így a

$$\Delta t = (t_0 + 1 + \overline{P}_M) - t'_0 \geq 0.$$

Az eddigi információkat összegezve:

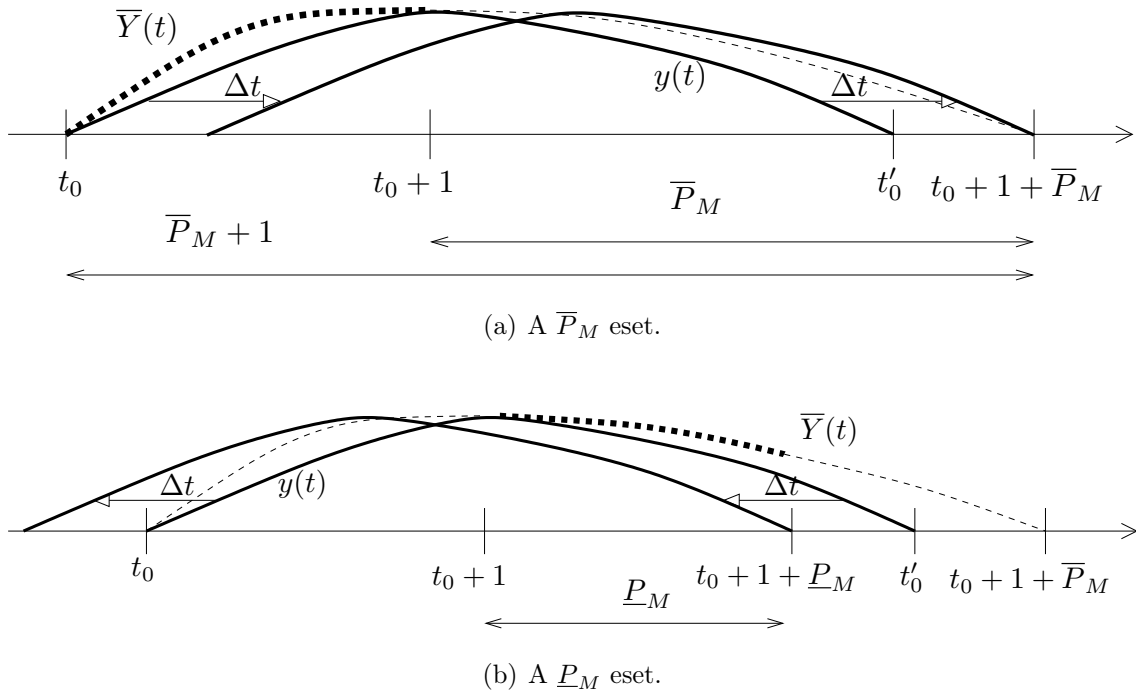
$$\overline{Y}(t) \geq y(t) \geq y(t - \Delta t) = y(t - ((t_0 + 1 + \overline{P}_M) - t'_0)).$$

Ebből az egyenlőségből látszik, hogy az $\overline{Y}(t)$ egy felső korlátja az $y(t)$ -nek a

$$\begin{aligned} [t_0 - ((t_0 + 1 + \overline{P}_M) - t'_0), t_0 + 1 - ((t_0 + 1 + \overline{P}_M) - t'_0)] = \\ = [t'_0 - (\overline{P}_M + 1), t'_0 - \overline{P}_M] \end{aligned}$$

intervallumon. Mivel a t'_0 zéruspont nem lehet nagyobb, mint $t_0 + 1 + \overline{P}_M$, ezért a $[t_0, t_0 + 1]$ intervallumot felhasználhatjuk egy jobb $y_{(dec,n)}^{(upper)}$ korláthoz a

$$[t'_0 - (\overline{P}_M + 1), t'_0 - \overline{P}_M]$$



4.11. ábra. A trajektória követésből kapott felső korlátok.

intervallumon.

Vegyünk a trajektóriakövetés $(t_0 + 1)$ kezdőpont utáni részét. Ebből kapunk egy felső korlátot az $y(t)$ -re a $[t_0 + 1, t_0 + 1 + \underline{P}_M]$ időintervallumon. Mivel itt szigorúan monoton csökkenő a függvény, és a $\underline{P}_M \leq p_M$, ezért

$$\bar{Y}(t) \geq y(t) \geq y(t - \Delta t) = y(t - ((t_0 + 1 + \underline{P}_M) - t'_0))$$

teljesül.

Ebből szintén látható, hogy felső korlát lesz a

$$\begin{aligned} [t_0 + 1 - ((t_0 + 1 + \underline{P}_M) - t'_0), t_0 + 1 + \underline{P}_M - ((t_0 + 1 + \underline{P}_M) - t'_0)] = \\ = [t'_0 - \underline{P}_M, t'_0] \end{aligned}$$

intervallumon is. ■

Ezen eredményt a következő módon is magyarázhatjuk. Az első esetben a periodikus megoldást eltoljuk úgy, hogy az eredeti t'_0 zéruspont a $(t_0 + 1 + \bar{P}_M)$ pontba kerüljön. Ekkor a monoton növekvő $(inc, 1)$ szakaszon az eltolt függvény az eredeti értéknél nem vesz fel nagyobb értéket, azaz az eredeti periodikus megoldás felső korlátja felső korlátja marad az eltolt megoldásnak is. Ezt az ötletet illusztráljuk a 4.11(a) ábrán.

A második esetben a periodikus megoldást úgy toljuk el, hogy az eredeti t'_0 zéruspont a $(t_0 + 1 + \underline{P}_M)$ pontba kerüljön. Így a monoton csökkenő (dec, n) szakaszon az eltolt függvény az eredeti értéknél nem vesz fel nagyobb értéket. Ezért az eredeti periodikus megoldás felső korlátja felső korlátja marad a periodikus megoldásnak a t'_0 pontot megelőzően is. Ezt láthatjuk a 4.11(b) ábrán.

Az előző két ötletből és az $y_{(dec,n)}^{(upper)}$ -ből kaphatunk egy felső korlátot a zéruspont előtti részre. Hasonlóan kaphatunk egy új alsó korlátot a t_0'' előtti részre is.

Most nézzük meg, hogyan kaphatunk egy erősebb korlátot a (dec, n) és az (inc, n) szakaszok $[t_0' - 1, t_0']$ intervallumára az előző korlátok $(t_0' - 1)$ előtti részeiből.

4.13. Állítás. *Az alábbi módon definiált korlátfüggvények helyesek:*

$$\bar{y}_{(dec,n)}^{(upper)}(t) = \min \left\{ \begin{array}{c} y_{(dec,n)}^{(upper)}(t) \\ \alpha \int_{t-1}^{t_0'-1} e^{y_{(dec,n)}^{(upper)}(x)} - 1 \, dx \end{array} \right\}, \text{ ha } t \in [t_0' - 1, t_0'], \quad (4.19)$$

és

$$\bar{y}_{(inc,n)}^{(lower)}(t) = \max \left\{ \begin{array}{c} y_{(inc,n)}^{(lower)}(t) \\ \alpha \int_{t-1}^{t_0''-1} e^{y_{(inc,n)}^{(lower)}(x)} - 1 \, dx \end{array} \right\}, \text{ ha } t \in [t_0'' - 1, t_0'']. \quad (4.20)$$

Bizonyítás. Először tekintsük a (dec, n) esetet. Ekkor tudjuk, hogy

$$y_{(dec,n)}^{(upper)} \geq y(t).$$

Integráljuk az y' -t t -től t_0' -ig $(t_0' - 1 \leq t \leq t_0')$:

$$-y(t) = y(t_0') - y(t) = -\alpha \int_t^{t_0'} e^{y(x-1)} - 1 \, dx = -\alpha \int_{t-1}^{t_0'-1} e^{y(x)} - 1 \, dx.$$

Ebből

$$y(t) \leq \alpha \int_{t-1}^{t_0'-1} e^{y_{(dec,n)}^{(upper)}(x)} - 1 \, dx.$$

Összegezve, ezzel megkaphatjuk az állításban szereplő felső korlátot.

Hasonlóan az $y_{(inc,n)}^{(lower)}$ esetén:

$$y(t) \geq \alpha \int_{t-1}^{t_0''-1} e^{y_{(inc,n)}^{(lower)}(x)} - 1 \, dx,$$

melyből következik az állításban szereplő második állítás. ■

Összefoglalva, az $y_{(inc,1)}^{(upper)}$, illetve az $y_{(inc,1)}^{(lower)}$ korlátfüggvényekből kaphatunk egy garantált trajektóriakövetést, melyből meghatározhatunk egy helyes felső korlátfüggvényt. E korlátfüggvény távolabbi értékeit felhasználhatjuk a következő zéruspont előtti 1 hosszú szakaszon a periodikus megoldás erősebb korlátainak meghatározásához. Ezen 1 hosszú szakasz korlátja szükséges az $y_{(dec,1)}^{(upper)}$, illetve az $y_{(dec,1)}^{(lower)}$ pontosabb korlátfüggvények kiszámításához. Hasonló elv működik az $y_{(inc,n)}^{(lower)}$ esetén is.

4.2.7. A periodikus korlátokat számító eljárás

Az $y_{(inc,1)}^{(lower)}$, $y_{(dec,1)}^{(upper)}$, $y_{(inc,1)}^{(upper)}$ és az $y_{(dec,1)}^{(lower)}$ csak 1 hosszan értelmezettek a $[t_0, t_0 + 1]$, illetve a $[t'_0, t'_0 + 1]$ időintervallumokon. Az $y_{(inc,n)}^{(lower)}$ és az $y_{(dec,n)}^{(upper)}$ függvények számítása során azonban $(t'_0 - 1)$ -nél, illetve a $(t''_0 - 1)$ -nél kisebb értékekre is szükségünk van, így ezeket hosszabban tároljuk. E rész túl hosszú tárolása szintén nem hasznos, így e részt 2 hosszan fogjuk tárolni, amely a korábbiak miatt nem okozhat gondot.

Mind a hat függvény esetében az egységnyi hosszú szakaszt egyenlő részekre osztjuk fel. A számítógép pontosságát kihasználva minden esetben egy 2^n alakú számot választunk ezen részek számára ahol $n \in \mathbb{N}$. Jelöljük az így kapott időszakokat t_i -vel, ahol $i \in (1, \dots, 2^n)$, illetve (dec, n) és (inc, n) esetén $i \in (1, \dots, 2^{n+1})$ a zérusponttól vett távolságuk szerint sorszámozva. Azaz a (dec, n) , illetve az (inc, n) részekben visszafelé, míg az $(inc, 1)$ és a $(dec, 1)$ részekben előre felé számozzuk meg az időszakokat. Egy ilyen rész hossza 2^{-n} , mely számítógépen pontosan ábrázolható, nem túl nagy n -ekre. Ezeken az időintervallumokon minden esetben egy konstans értéket vesznek fel a korlátfüggvényeink. Ilyen konstrukcióval egy lépcsős függvényt kapunk, mely minden pontban megfelelően becsli a periodikus függvényünket. Ezen lépcsős függvényt jelöljük Y -nal.

A lépcsős függvényen az integrálok numerikus számítására már alkalmazhatjuk a téglalap módszert. Az eljárás korrektségének megtartása érdekében egy t_j időszakban a függvényérték meghatározásához a $(t_j - 1)$ időszakra eső téglalap területét is be kell számítanunk a téglalap módszerbe.

Így az $Y_{(inc,n)}^{(lower)}$ függvényből az alábbi módon lehet kiszámolni az $\bar{Y}_{(inc,1)}^{(upper)}(t_i)$ ($i = 1, \dots, 2^n$) értéket a (4.14) képlet alapján:

$$\bar{Y}_{(inc,1)}^{(upper)}(t_i) = \min \left\{ -\alpha \sum_{j=1}^i \left(e^{Y_{(inc,n)}^{(lower)}(t_{2^n-j+1})} - 1 \right) / 2^n; Y_{(inc,1)}^{(upper)}(t_i) \right\}. \quad (4.21)$$

A (4.15), a (4.17) és a (4.18) esetén is hasonlóan kapjuk, hogy

$$\bar{Y}_{(dec,1)}^{(lower)}(t_i) = \max \left\{ -\alpha \sum_{j=1}^i \left(e^{Y_{(dec,n)}^{(upper)}(t_{2^n-j+1})} - 1 \right) / 2^n; Y_{(dec,1)}^{(lower)}(t_i) \right\}, \quad (4.22)$$

$$\bar{Y}_{(inc,1)}^{(lower)}(t_i) = \max \left\{ M + \alpha \sum_{j=i}^{2^n} \left(e^{Y_{(inc,n)}^{(lower)}(t_{2^n-j+1})} - 1 \right) / 2^n; Y_{(inc,1)}^{(lower)}(t_i) \right\}, \quad (4.23)$$

és

$$\bar{Y}_{(dec,1)}^{(upper)}(t_i) = \min \left\{ -m + \alpha \sum_{j=i}^{2^n} \left(e^{Y_{(dec,n)}^{(upper)}(t_{2^n-j+1})} - 1 \right) / 2^n; Y_{(dec,1)}^{(upper)}(t_i) \right\}. \quad (4.24)$$

A fenti formulákkal megadunk egy befoglalást az $(inc, 1)$, illetve a $(dec, 1)$ szakaszokon a periodikus megoldásra. Tudjuk, hogy ezen szakaszok végénél a periodikus megoldás felveszi a szélsőértékeket. Ezután egy egyszerű eljárással követhető a

5. Algoritmus. A periódushossz számítása.

Input:

- s : M vagy $(-m)$, mely a periodikus pálya szélsőértéke,
- α : a vizsgált differenciálegyenlet paramétere,
- 2^n : az egységnyi szakasz felosztásának darabszáma,
- L, U : az 1 hosszú szakasz alsó és felső korlátja.

Output:

- A nem 1 hosszú szakasz hosszának befoglalása,
- a trajektória befoglalása a kezdő zérusponttól.

- 1. lépés:** Foglaljuk be az $Y(t_i)$ -be ($i = 1, \dots, 2^n$) az 1 hosszú szakaszon a periodikus megoldást az U és az L függvények segítségével.
- 2. lépés:** Legyen $j = 2^n + 1$ és legyen $Y_{last} = s$.
- 3. lépés:** Foglaljuk be az $Y(t_j)$ -t a $(Y_{last} + (-\alpha (e^{Y(t_{j-n})} - 1))) \cdot [0, 1/2^n]$ képletel.
- 4. lépés:** Legyen $Y_{last} = Y_{last} + (-\alpha (e^{Y(t_{j-n})} - 1)) / 2^n$.
- 5. lépés:** Ha az $Y(t_{j-1})$ befoglalás nem tartalmazza a 0-át és az $Y(t_j)$ igen, akkor a nem 1 hosszú szakasz hosszára vonatkozó alsó korlát a $\frac{j}{2^n} - 1$.
- 6. lépés:** Ha az $Y(t_{j-1})$ befoglalás tartalmazza a 0-át és az $Y(t_j)$ nem, akkor a nem 1 hosszú szakasz hosszára vonatkozó felső korlát a $\frac{j}{2^n} - 1$, és STOP.
- 7. lépés:** Legyen $j = j + 1$.
- 8. lépés:** Ha $j < 3 \cdot 2^n$, akkor folytassuk a 3. lépéssel, egyébként a felső korlát legyen $\frac{j}{2^n} - 1$ és STOP.

trajektória (lásd az 5. Algoritmust), mely során azt kell ellenőrizni a p_m és a p_M értékek befoglalásának megadásához, hogy a trajektória jelenlegi és előző befoglalása tartalmazza-e a 0 értéket. Abban az esetben, ha az egy lépéssel korábbi befoglalás még nem tartalmazta a 0-át, de a jelenlegi már tartalmazza, akkor a jelenlegi időintervallumon a periodikus megoldás elérhette már a zéruspontot. Hasonlóan, ha az előző befoglalás tartalmazta a 0-át, a jelenlegi pedig nem, akkor a trajektória biztos, hogy már áthaladt a zérusponton. E két tulajdonság együtt egy garantált befoglalást ad a maximumpont és a zéruspont közötti távolságra. Az eljárás eredménye továbbá a trajektória befoglalása a $[t_0, t_0 + 1 + \overline{P}_M]$, illetve a $[t'_0, t'_0 + 1 + \overline{P}_m]$ intervallumon.

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan alkalmazhatjuk a trajektória követésénél kapott befoglalás felső értékeit az $\tilde{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}$ függvény javítására, mely utóbbi egy 3 hosszú közbülső számításokhoz használt függvény. Először tekintsük az $(inc, 1)$ szakasz felső korlátját, mely az $Y(t_i)$ trajektória követés felső korlátja az $i \in (1, \dots, 2^n)$ részen. A 4.12. Tétel alapján ezt a részt kell felhasználni az $Y_{(dec,n)}^{(upper)}$ függvényben a t_i időintervallumokon, ahol $i \in ([2^n \overline{P}_M] + 2^n, \dots, [2^n \overline{P}_M] + 1)$. Az alábbi képlet adja a beillesztés módját:

$$\tilde{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}(t_i) = \min \left\{ \bar{Y}(t_{\lceil 2^n \bar{P}_M \rceil + 2^n + 1 - i}); Y_{(dec,n)}^{(upper)}(t_i) \right\},$$

$$\text{ahol } i \in (\lceil 2^n \bar{P}_M \rceil + 1, \lceil 2^n \bar{P}_M \rceil + 2^n). \quad (4.25)$$

Most nézzük meg, hogy hogyan használható a trajektória követésből a maximum pont utáni szakaszra kapott eredmény. Az $Y(t_i)$ függvény tartalmazza ezen használható korlátokat az $i \in (2^n + 1, 2^n + \lfloor 2^n \underline{P}_M \rfloor)$ szakaszon. Ezeket kell felhasználni az $\tilde{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}$ függvényben a t_i időintervallumokon, ahol $i \in (\lfloor 2^n \underline{P}_M \rfloor, \dots, 1)$. A 4.12. Tétel alapján az alábbi képlet adja a beillesztés módját:

$$\tilde{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}(t_i) = \min \left\{ \bar{Y}(t_{\lfloor \underline{P}_M * 2^n \rfloor + 2^n + 1 - i}); Y_{(dec,n)}^{(upper)}(t_i) \right\},$$

$$\text{ahol } i \in (1, \dots, \lfloor 2^n \underline{P}_M \rfloor). \quad (4.26)$$

Ha $\bar{P}_M < 1$, akkor a 3 hosszú intervallumon tárolt $\tilde{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}$ függvény t'_0 -tól $\bar{P}_M + 1$ -nél távolabb eső pontjaiba 0-át is írhatunk felső korlátnak, azaz

$$\tilde{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}(t_i) = 0, \text{ ahol } \lceil 2^n \bar{P}_M \rceil + 2^n + 1 \leq i \leq 3 \cdot 2^n. \quad (4.27)$$

Az előző gondolatmenetek alapján az $Y_{(inc,n)}^{(lower)}$ függvényre a következőt kapjuk:

$$\tilde{Y}_{(inc,n)}^{(lower)}(t_i) = \min \left\{ \underline{Y}(t_{\lceil 2^n \bar{P}_m \rceil + 2^n + 1 - i}); Y_{(inc,n)}^{(lower)}(t_i) \right\},$$

$$\text{ahol } i \in (\lceil 2^n \bar{P}_m \rceil + 1, \lceil 2^n \bar{P}_m \rceil + 2^n), \quad (4.28)$$

$$\tilde{Y}_{(inc,n)}^{(lower)}(t_i) = \min \left\{ \underline{Y}(t_{\lceil 2^n \bar{P}_m \rceil + 2^n + 1 - i}); Y_{(inc,n)}^{(lower)}(t_i) \right\},$$

$$\text{ahol } i \in (\lceil 2^n \bar{P}_m \rceil + 1, \lceil 2^n \bar{P}_m \rceil + 2^n), \quad (4.29)$$

$$\tilde{Y}_{(inc,n)}^{(lower)}(t_i) = \underline{Y}(t_{\lfloor \underline{P}_m * 2^n \rfloor + 2^n + 1 - i}), \text{ ahol } i \in (1, \dots, \lfloor 2^n \underline{P}_m \rfloor). \quad (4.30)$$

Miután meghatároztuk az erősebb $\tilde{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}$ és $\tilde{Y}_{(inc,n)}^{(lower)}$ függvényeket, nézzük meg, hogyan számíthatók a „távoli” korlátokból pontosabb $\bar{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}(t_i)$ és $\bar{Y}_{(inc,n)}^{(lower)}(t_i)$ korlátozófüggvények, ahol $i \in (1, \dots, 2^n)$. Ezeket a függvényeket az előzőekhez hasonlóan megkaphatjuk a (4.19) és a (4.20) képletekből:

$$\bar{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}(t_i) = \min \left\{ \alpha \sum_{j=i}^{2^n} \left(e^{\tilde{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}(t_{j-2^n})} - 1 \right) / 2^n; \tilde{Y}_{(dec,n)}^{(upper)}(t_i) \right\}, \quad (4.31)$$

illetve

$$\bar{Y}_{(inc,n)}^{(lower)}(t_i) = \max \left\{ \alpha \sum_{j=i}^{2^n} \left(e^{\tilde{Y}_{(inc,n)}^{(lower)}(t_{j-2^n})} - 1 \right) / 2^n; \tilde{Y}_{(inc,n)}^{(lower)}(t_i) \right\}. \quad (4.32)$$

Ezzel egy numerikus módszert adtunk a korlátsorozatok előállítására. Tudjuk, hogy a periodikus megoldás értéke az $y(t_0 + 1)$ -ben az $(inc, 1)$ szakaszon M , illetve a $(dec, 1)$ szakaszon $(-m)$. Így a korlátfüggvényre az alábbiaknak kell teljesülnie:

$$Y_{(inc,1)}^{(upper)}(t_{2^n}) \geq M,$$

illetve

$$Y_{(dec,1)}^{(lower)}(t_{2^n}) \leq -m.$$

A következőkben ismertetjük a 6. Algoritmust, mely egy adott α -ra, M -re, illetve m -re eldönti, hogy létezik-e periodikus megoldás M , illetve $(-m)$ szélsőértékekkel. Az eljárás során használhatjuk az $\alpha \leq 1.5$ esetben levezetett összefüggéseket is.

Ezen eljárás működik akkor is, hogy ha α , M és m intervallumok. Ebben az esetben a korlátozó függvények az intervallumok minden értékére korlátozzák a periodikus pályákat.

4.2.8. A párhuzamosított ellenőrző eljárás

A fentiekben mutattunk egy algoritmust, mely képes megbízhatóan bizonyítani, hogy adott M és m szélsőértékekkel valamint α paraméterrel – melyek lehetnek intervallumok is – nem létezik periodikus megoldás. Ezek után az ellenőrzéshez elegendő lenne egy B&B eljárás. Azonban a nagy számítási igény miatt kifejlesztettünk egy párhuzamosított egyszerű B&B algoritmust (lásd a 7. Algoritmust), melyre a szokásos helyességet igazoló tételeket kimondjuk és bizonyítjuk.

4.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy rendelkezésre áll a feltétel egy megbízható ellenőrző eljárása, valamint a főprogram által indított ellenőrző rutin eredménye szerint a vizsgált feltétel teljesül az ellenőrizendő tartományban, ekkor az ellenőrző rutin a kiindulási intervallumnak egy olyan felosztását állítja elő, melynek minden részintervallumára igaz az, hogy teljesül rá a feltétel.*

Bizonyítás. A szálak – szülő és gyerek kapcsolatát nézve – egy fastruktúrát alkotnak, melynek gyökerében a főprogram által indított ellenőrző eljárás áll. Ezen fastruktúrán haladva egy teljes indukcióhoz hasonló bizonyítást fogunk bemutatni. Tegyük fel, hogy a gyerek processzekre, mint főprogramként indított eljárásokra igaz az állítás. Most megmutatjuk, hogy a szülő processzre is igaz az állítás.

Abban az esetben, ha az algoritmus sikeres eredménnyel állt meg, akkor a 11. lépésben fejeződött be. Ez azt jelenti, hogy az algoritmus a kezdő intervallumokat feldarabolta olyan részintervallumokra, melyek nem sértik az adott feltételt. Egyébként a 10. lépésben állt meg.

Másfelől csak akkor állhatott meg a 11. lépésben az ellenőrzési eljárás, ha minden generált részintervallumot feldarabolta és a verembe helyezett, vagy eldobott, mert igaz volt rá a 6. lépésben szereplő feltétel, vagy a gyerek processz bizonyította rá a feltételt.

6. Algoritmus. A periodikus pálya létezésének ellenőrzése.

Input: – M és $(-m)$: a periodikus pálya szélsőértékei,
– α : a vizsgált differenciálegyenlet paramétere,
– 2^n : az egységnyi szakasz felosztásának darabszáma,
– $cikl_max$: a korlátozó sorozat maximális hossza.
Output: – A megállapítás, miszerint létezik-e periodikus pálya a megadott szélsőértékekkel.

0. lépés: Ellenőrizzük adott m -re, illetve M -re a (4.11), (4.12) és (4.13) feltételeket. Ha bármelyik feltétel hamis, akkor nem létezik periodikus megoldás, és STOP.

1. lépés: Legyen $c = 0$ és minden $i = 1, \dots, 2^n$ -re:

$$\text{az } Y_{(inc,1)}^{(upper)}(t_i) = M, \text{ az } Y_{(dec,1)}^{(lower)}(t_i) = -m,$$

$$\text{az } Y_{(inc,1)}^{(lower)}(t_i) = 0 \text{ és az } Y_{(dec,1)}^{(upper)}(t_i) = 0,$$

valamint minden $i = 1, \dots, 2^{n+1}$ -re:

$$\text{az } Y_{(dec,n)}^{(upper)}(t_i) = M, \text{ és } Y_{(dec,n)}^{(lower)}(t_i) = -m.$$

2. lépés: Számoljunk ki egy-egy erősebb korlát függvényt az $Y_{(inc,1)}^{(upper)}$ -re és az $Y_{(inc,1)}^{(lower)}$ -re az $Y_{(inc,n)}^{(lower)}$ -ből a (4.21) és a (4.23) képletek felhasználásával.

3. lépés: Ha az $y_{(inc,1)}^{(upper)}(t_{2^n}) < M$, akkor nem létezik periodikus pálya és STOP.

4. lépés: Számoljunk ki a trajektória követő eljárással egy-egy befoglalást a trajektóriára.

5. lépés: Készítsünk a trajektóriakövetésből kapott eredményből egy erősebb felső korlátot az $Y_{(dec,n)}^{(upper)}$ -be a (4.25-4.27) és a (4.31) képletekkel.

6. lépés: Javítsuk az $Y_{(dec,1)}^{(lower)}$ és az $Y_{(dec,1)}^{(upper)}$ korlát függvényeket a $Y_{(dec,n)}^{(upper)}$ -ből a (4.22) és a (4.24) képletek felhasználásával.

7. lépés: Ha a $y_{(dec,1)}^{(lower)}(t_{2^n}) > -m$, akkor nem létezik periodikus pálya és STOP.

8. lépés: Készítsünk a trajektóriakövetésből kapott eredményből egy erősebb alsó korlátot az $Y_{(inc,n)}^{(lower)}$ -re a (4.28-4.30) és a (4.32) képletekkel.

9. lépés: Ha $c \geq cikl_max$, akkor létezik periodikus megoldás és STOP.

10. lépés: Legyen $c = c + 1$, és folytassuk a 2. lépéssel.

7. Algoritmus. A párhuzamosított ellenőrző eljárás.

Input: – i : a kezdő többdimenziós intervallum,
Konstans: – ϵ : a részintervallumok legkisebb megengedett mérete,
 – $thread_max$ a maximálisan futtatható szálak száma
Output: – A feltétel teljesül az adott I halmaz minden pontjára, vagy
 – mutat egy olyan ϵ -nál kisebb intervallumot, mely megsértheti
 az adott feltételt

- 1. lépés** Növeljük a futó szálak számát 1-gyel.
 - 2. lépés** Tegyük be a kezdő intervallumot a verembe.
 - 3. lépés** Vegyünk ki egy v intervallumot a veremből.
 - 4. lépés** Határozzuk meg a v intervallum legszélesebb oldalát.
 - 5. lépés** Számoljuk ki a megbízható eljárással, hogy a v intervallumra teljesül-e a feltétel.
 - 6. lépés** Ha a feltétel nem teljesül, akkor
 - ha a v intervallum szélesebbik oldala kisebb, mint a felhasználó által adott érték, akkor
 - írjuk ki v -t és folytassuk a 8. lépéssel,
 egyébként
 - vágjuk fel v -t a szélesebbik oldala mentén, és rakjuk be a két rész-intervallumot a verembe
 - ha az éppen futó szálak száma kisebb mint $thread_max$, akkor a veremben lévő egyik intervallummal új szálát indítunk,
 - 7. lépés** Ha a verem nem üres, akkor folytassuk a 3. lépéssel.
 - 8. lépés** Csökkentsük a futó szálak számát 1-gyel.
 - 9. lépés** Várjuk meg az összes ezen eljárás által indított szál befejeződését.
 - 10. lépés** Ha kiírtunk a feltételnek ellentmondó intervallumot, vagy bármelyik indított szál talált nem megfelelő intervallumot, akkor I intervallumban van ϵ -nál kisebb intervallum, mely megsérti az adott feltételt és STOP.
 - 11. lépés** Írjuk ki, hogy a feltétel teljesül az adott I halmaz minden pontjára és STOP.
-

Tehát ha a 11. lépésben állt meg az algoritmus, akkor a kezdő intervallumot (I) a gyerek processzekkel együtt lefedte olyan részintervallumokkal $\{I_i\}_{i=1}^k$, melyekre igaz az állításban szereplő feltétel.

Ezzel bizonyítottuk, hogy minden szülő processzre igaz a tételben szereplő állítás, azaz a főprogram által indított processzre is. ■

Miután láttuk, hogy a 7. Algoritmus helyes, nézzük meg, hogy képes-e véges időben eldönteni egy halmazról, hogy annak minden pontja rendelkezik-e a feltétellel.

4.15. Tétel. *Tegyük fel, hogy rendelkezésre áll az adott feltétel egy megbízható ellenőrző eljárása, mely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden x -re és környezetére teljesül a feltétel, ekkor létezik x -nek olyan kicsi nyitott környezete, melyre a feltételt ellenőrző eljárás képes igazolni a feltétel igazságát. Ha az ϵ algoritmus paraméter nulla, valamint a feltétel igaz a teljes kezdő intervallumon, akkor a főprogram által indított ellenőrző rutin véges sok iterációs lépés után megáll azzal az eredménnyel, hogy a feltétel teljesül.*

Bizonyítás. Az előző tételhez hasonlóan most is a processzek által képzett fán haladunk, teljes indukcióval. A szülő processzekre pedig egy indirekt bizonyítást adunk.

Tegyük fel, hogy a tétel állítása nem igaz. Ebben az esetben végtelen sok részintervallumot $\{I_i\}_{i=1}^\infty$ generál az algoritmus, vagy egy olyan processzre vár, amely nem áll meg.

Tekintsük az első esetet, ekkor léteznie kell ezen intervallumok torlódási pontjának, legyen ez x . A B&B eljárásban mindig feleződik az intervallum szélessége, így $\lim_{i=1}^\infty \text{wid}(I_i) = 0$. Az ellenőrző eljárással az x kicsi nyitott környezetére is tudjuk bizonyítani a feltételt, így léteznie kell egy olyan K küszöbszámnak i -re, hogy minden $K < i$ -re a feltételt egy lépésben tudjuk ellenőrizni. Azaz az algoritmus ebből az intervallumból nem készít további részintervallumokat. Ezzel ellentmondásba kerültünk azzal a feltevésünkkel, hogy végtelen sok intervallumot generál az algoritmus.

A második esetben az indukciós feltevés miatt nem lehetséges az, hogy az egyik gyerek processz generálna végtelen sok intervallumot. Az lehetséges lehet még, hogy egy láncot alkotva végtelen sok gyerek processz indul el. De mivel a gyerek processzeknek is egyre kisebb intervallumot adunk, így azokra is alkalmazható az első esetben használt gondolatmenet. Ezzel ellentmondásra jutottunk azzal, hogy a szülő processzus nem áll meg.

Mivel $\epsilon = 0$, így a 6. lépésben sem írtunk ki semmit, így a 11. lépésben nem terminálhatott az eljárás, tehát igazoltuk az állítást. ■

Most igazoljuk, hogy ha nem teljesül a feltétel a halmazra, akkor a 7. Algoritmus nem futhat le sikeresen.

4.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy rendelkezésre áll a feltétel egy megbízható ellenőrző eljárása, az ϵ algoritmus paraméter nulla, valamint van olyan x pont, hogy a feltétel*

nem teljesül erre, ekkor az ellenőrző rutin nem tud megállni véges lépésben, és nem ad eredményt arra vonatkozóan, hogy a feltétel teljesül-e.

Bizonyítás. Tekintsük azokat az x pontot tartalmazó részintervallumokat, melyeket az algoritmus generál. Ezekre a részintervallumokra teljesül, hogy a feltételt nem tudjuk igazolni. Így mindig marad egy intervallum a veremben, mely tartalmazza x -et, mivel az algoritmus nem tudja azt eldobni a 6. lépésben. Azaz az algoritmus nem állhat meg a 10. lépésben. Másfelől a generált intervallumok szélessége mindig pozitív, így sikertelen eredménnyel sem fejeződhet be az algoritmus futása. Tehát az algoritmus nem áll meg a tételben szereplő feltételek esetén. ■

Ezzel a számítógépes rész ismertetését befejeztük. Most nézzük meg, hogyan illeszthető ez a sejtés a teljes bizonyításba.

4.2.9. A sejtés teljes bizonyítása

Az egyszerűbb számítások végett a (4.7) és a (4.8) feltételeken fogjuk bemutatni a teljes bizonyítás vázlatát. Az erősebb (4.11), (4.12) és (4.13) feltételekkel is hasonlóan számíthatóak a következőkben leírt állítások.

A korábbi számítógépes eljárások egyik problémája az, hogy csak véges nagy intervallumokra működnek. Lássuk be az alábbi állítást, melyben felülről korlátozzuk a lehetséges M -eket és m -eket.

4.17. Állítás. *Egy periodikus megoldás esetén, a lehetséges M értékek nem lehetnek nagyobbak $\pi/2$ -nél, míg a m értékek 6-nál.*

Bizonyítás. Tekintsük a (4.7) feltételt. Mivel egy hatványfüggvény sosem lehet negatív, így igaz a következő összefüggés:

$$M \leq -\alpha (e^{-m} - 1) \leq -\alpha(0 - 1) = \alpha.$$

Mivel minket csak az $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ eset érdekel, így bizonyítottuk az állítást a M -re. Most tekintsük a (4.8) feltételt. Mivel tudjuk, hogy $M \leq \frac{\pi}{2}$ és $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, így

$$m \leq \alpha (e^M - 1) \leq \alpha(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) \leq 6,$$

mellyel bizonyítottuk az állítást. ■

Krisztin Tibor és Röst Gergely [43] eredményét az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

4.18. Tétel. *Léteznek olyan K_M és K_m pozitív konstansok, melyekhez nem létezik periodikus pálya egyik $M \in [0, K_M]$ és $m \in [0, K_m]$ szélsőértékekkel sem.*

Ezen eredmény elegendő lenne a bizonyításhoz, de sajnos az ebben szereplő konstansok sokkal kisebbek, mint a korábban kiszámolt konstansok, így szükséges további eredmények elérése. A számítógépes ellenőrzés csak akkor lehet sikeres, ha az ellenőrizendő M és m intervallumok egyike sem tartalmazza a nullát. Így lássuk be a következő állítást, mely következik az eddigi elméleti eredményekből.

4.19. Állítás. *Léteznek olyan K'_M és K'_m pozitív konstansok, melyek esetében nem létezik periodikus pálya egyetlen $M \notin [K'_M, \pi/2]$ és $m \notin [K'_m, 6]$ szélsőértékekkel sem ($m, M \geq 0$).*

Bizonyítás. Legyen

$$K'_M = \min \left\{ K_M, \log \left(\frac{K_m}{\pi/2} + 1 \right) \right\}$$

és

$$K'_m = \min \left\{ K_m, -\log \left(\frac{K_M}{-\pi/2} + 1 \right) \right\}.$$

Belátjuk, hogy a fent definiált konstansokra az eddigi elméleti eredményekből következik az állítás. Ha $M > \pi/2$, vagy $m > 6$, akkor a 4.17. Állításból következik, hogy nincs periodikus megoldás ilyen szélsőértékekkel. Ha a $M < K'_M$ és $m < K'_m$, akkor a minimumképzés miatt $M < K_M$ és $m < K_m$, és ebben az esetben a 4.18. Tételből tudjuk, hogy nincs periodikus megoldás.

Már csak az alábbi intervallumokra kell belátni, hogy nem tartalmaznak lehetséges szélsőértékeket:

- $M \in (K'_M, \pi/2)$ és $m \in (0, K'_m)$,
- $M \in (0, K'_M)$ és $m \in (K'_m, 6)$.

A továbbiakban belátjuk az első állítást. Vegyük a (4.7) korlátot:

$$M \leq -\alpha (e^{-m} - 1),$$

majd rendezzük át az egyenlőtlenséget és nézzük meg, hogy m -re milyen korlátot kapunk.

$$m \geq -\log \left(\frac{M}{-\alpha} + 1 \right).$$

A vizsgált rész miatt $M \geq K'_M$, továbbá a minimumképzés miatt $M \geq K_M$, tehát az előbbi feltétel alapján:

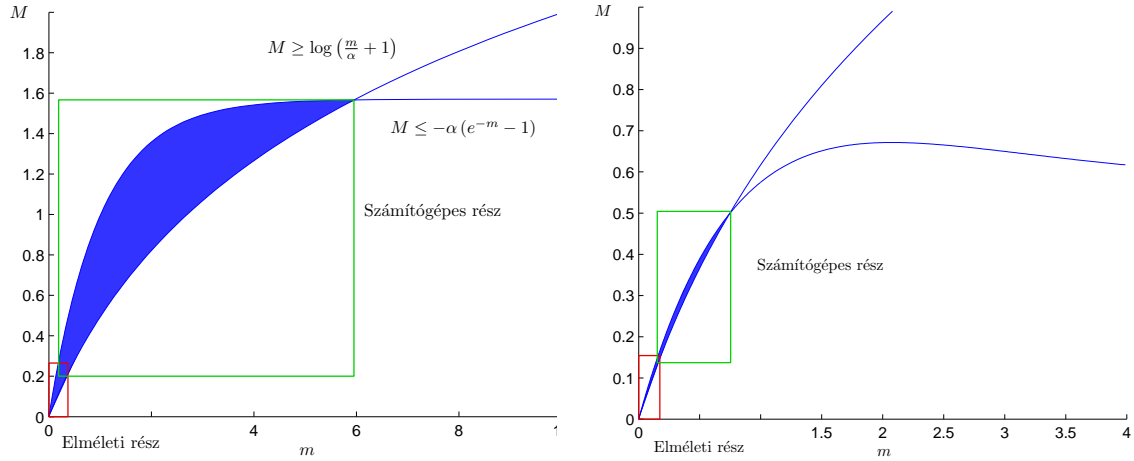
$$m \geq -\log \left(\frac{K_M}{-\alpha} + 1 \right),$$

aminek eleget tevő pont nincs a vizsgált m tartományban. A második állítás igazolását hasonlóan végezhetjük a (4.8) korlátból. ■

Az előzőekből következően elegendő az alábbi intervallumot vizsgálni számítógéppel (lásd a 4.12(a). ábrát):

$$M \in [K'_M, \pi/2] \text{ és } m \in [K'_m, 6].$$

Ahogy a szakasz elején is említettük ezeket a számításokat a gyengébb feltételekkel kaptuk. Azonban az erősebb (4.11), (4.12) és (4.13) feltételekkel is számolhatunk, mely esetben sokkal kisebb számítógéppel ellenőrizendő intervallumot kapunk (lásd a 4.12(b). ábrát).



(a) Az $\alpha \leq 1.0$ esetben használt feltételek esetében. (b) Az $\alpha \leq 1.5$ esetben használt feltételek esetében.

4.12. ábra. Elméleti eredmények és a számítógépes rész kapcsolata (a részek nagysága csak illusztráció).

Krisztin T. és Röst G. eredménye a dolgozat készítésekor még nem volt véglegesítve, így itt numerikus eredményekről részletesen nem értekezünk. Az előzetes eredmények alapján a

$$M \in [0.075, 1] \text{ és } m \in [0.075, 1]$$

intervallumot vizsgáltuk. Az $\alpha \in [1.5, \pi/2]$ -re a számítógépes bizonyításához szükséges CPU idő 1 nap volt egy SUN szerveren (2 processzorral, 4 maggal és 4GB memóriával). Ezzel sikerült a sejtés teljes bizonyítását megadni. Így elmondhatjuk, hogy a végleges matematikai eredmény megszületése után képesek leszünk számítógéppel segített bizonyítást adni egy több mint ötven éves sejtésre.

Összefoglaló

Dinamikai rendszerek vizsgálatakor sok esetben érdekes kérdés, hogy valóban rendelkeznek-e a közelítő megoldások során észlelt kaotikus vagy stabil viselkedéssel. Ennek megválaszolására megbízható technikákat javasoltunk, melyek képesek eldönteni egy adott régióról, hogy az rendelkezik-e az ilyen viselkedésekhez szükséges tulajdonságokkal.

Ebben az esetben a megbízhatóság matematikai erejű bizonyítást jelent, melyhez a számítógépes részben kezelni kell minden kerekítési és egyéb hibát. Valós számok helyett intervallumokkal számolunk, és ha az eredményintervallum valamely határpontja nem ábrázolható számítógépen, akkor megfelelően kifelé kerekítjük azt.

Az Hénon-leképezés kaotikus régiói

Az ide tartozó problémákat az ezt vizsgáló matematikusok rendszerint emberi beavatkozással oldják meg. Az egyik ilyen módszer az, amikor a Lipschitz-konstans használatával kezelik a közelítő megoldásokat, valamint figyelembe veszik a kerekítési hibákat is. Majd egy adott számú rácspontra számítógéppel ellenőrzik az adott feltételeket. Ezt a módszert alkalmazta például Zgliczyński is, mikor az Hénon-leképezés

$$\mathcal{H}(x_1, x_2) = (1 - Ax_1^2 + x_2, Bx_1)$$

kaotikus viselkedését vizsgálta. Az emberi beavatkozás elkerülésére egy intervallumaritmetikán alapuló automatikus eljárást javasolunk.

A kaotikus régió létezésének ellenőrzésére egy, az intervallumaritmetikán alapuló korlátozás és szétválasztás eljárást készítettünk. Az algoritmus először meghatározza a kezdő intervallumot, mely tartalmazza az ellenőrizendő tartományt, majd egymás után ellenőrzi a három tartalmazási tulajdonságot. Az állítás helyességéhez természetesen mind a három tulajdonságot igazolni kell. Az Hénon-leképezés 7-dik iteráltja esetében a szükséges transzformációk száma rendre 273, 523 és 1613 volt. Abban az esetben, ha az algoritmus nem volt képes közvetlenül igazolni az állítás helyességét egy részintervallumra, akkor azt eltárolja, hogy később tovább darabolhassa. A tároló verem maximális mélysége az ellenőrzés során rendre 11, 13 és 14 volt. A szükséges CPU idő mindössze pár másodperc volt egy átlagos PC-n.

Bebizonyítottuk, hogy az algoritmusunk képes véges számú lépés után pozitív választ adni, és a kapott válasz matematikai értelemben is megbízható. Egy ilyen teljesen automatikus eljárás a kaotikus régió bizonyítására célfüggvényként használható egy optimalizáló eljárásban, mely így alkalmas lehet új kaotikus régiók detektálására.

A megadott optimalizáló eljárás sikerességében kulcsfontosságú szempont, hogy hogyan konstruáljuk meg a célfüggvényt. Korábbi, hasonló problémák tapasztalatai alapján, úgy döntöttünk, hogy összeadjuk azokat a nemnegatív értékeket, amelyek jellemzik, hogy milyen mértékben sérülnek az adott feltételek. Abban az esetben, ha bármely feltétel sérül, az összeghez hozzáadunk egy pozitív konstans.

Az optimalizáló eljárásunkat először az Hénon-leképezés 5-dik iteráltján teszteltük. Megjegyezzük, hogy a kisebb iteráltakra nehezebb a kaotikus régiók megtalálása, továbbá a szakirodalomban sem található a 7-nél kisebb iteráltakra ilyen tartomány.

Ezzel az eljárással az Hénon-leképezés számos kaotikus régióját feltártuk. Az eljárás alkalmas volt továbbá a topologikus entrópia alsó korlátjának megadására is.

A kényszererős fékezett inga kaotikus viselkedése

A mai szakirodalomban kevés cikk tartalmaz matematikai erejű bizonyítást valósnak tekinthető mechanikai rendszer kaotikusságára. Ebben a részben egy kényszererős fékezett ingával foglalkoztunk, mely egy mechanikai modell. Ebben a rendszerben egy test függ egy merev súlytalan rúdon, ezért a test csak egy körpályán tud mozogni. A gravitáción kívül a légellenállás is hat a rendszerre, amely az inga sebességével arányos nagyságú és azzal ellentétes irányú. Hat továbbá egy külső erő is a testre, melynek nagysága $\cos t$, ahol t az eltelt időt jelöli.

A tekintett másodrendű differenciálegyenlet a következő:

$$x'' = \cos t - 0.1x' - \sin x,$$

ahol x az inga szöge, és x' az inga forgási sebessége.

A matematikai erejű bizonyításhoz szükségünk van $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ négyszögekre, melyek „hosszúak” az instabil, és „keskenyek” a stabil sokaság irányában. A „különleges” pályák Poincaré-leképezés (P) melletti képeinek az alábbi tulajdonságokkal kell rendelkezniük:

1. a különleges pályák benne vannak az $\cup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k$ -ban;
2. a különleges pályák konzekvensen „látogatják meg” a Q_k négyszögeket:
 ha $P^n(x_0, x'_0) \in Q_k$ valamely $k, n \in \mathbb{Z}$ -re, akkor $P^{n+1}(x_0, x'_0) \in Q_{k-1}$ vagy $P^{n+1}(x_0, x'_0) \in Q_k$ vagy $P^{n+1}(x_0, x'_0) \in Q_{k+1}$.

A bizonyításban fontos szerepet játszik az a tény, hogy ezen különleges pályák tetszőlegesen előírt sorrendben látogathatják meg a $\{Q_{i_k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ téglalapokat. Ennek igazolásához ismernünk kell ezen Q_k téglalapok $P(Q_k)$ Poincaré-képeit és bizonyítani egy Smale-patkó létezését.

Erre a problémára alkalmaztuk a korábban említett korlátozás és szétválasztás alapú technikánkat, amely képes volt bizonyítani a tekintett rendszer kaotikus viselkedését.

A Wright-sejtés vizsgálata

E.M. Wright az alábbi késleltetett differenciálegyenletet vizsgálta:

$$z'(t) = -\alpha z(t-1)(1+z(t)),$$

ahol α egy pozitív konstans, és a kezdeti függvény $(\phi(s))$ azonosan $c > -1$, azaz $\phi(s) = c$ az összes $s \in [-1, 0]$ -ra.

Az egyszerűbb számítások végett használjuk a $z(t) = e^{y(t)} - 1$ helyettesítést. Ekkor $z'(t) = e^{y(t)}y'(t)$ és $z(t-1) = e^{y(t-1)} - 1$. Ily módon a tekintett differenciálegyenletünk:

$$y'(t) = -\alpha(e^{y(t-1)} - 1),$$

alakban írható fel, ahol a kezdeti függvény legyen $\phi(s) = c$, $s \in [-1, 0]$.

E.M. Wright azt a sejtést fogalmazta meg, hogy az egyenlet megoldásai nullához konvergálnak az α paraméterek széles körére. Ebben a cikkében bebizonyította az állítást $\alpha \leq 1.5$ -re, de 1.5 és $\pi/2$ közötti értékekre csak sejtette az állítás helyességét.

Készítettünk egy új, helyes és erősebb befoglalási sémát, mely képes korlátot adni a periodikus megoldások szélsőértékeire. Ezen eljárás – többek között – Wright eredeti ötletén alapszik. A bizonyításban alkalmaztuk a Taylor-soron alapuló algoritmusunkat, hogy befoglaljuk a trajektóriákat.

Az elméleti eredmények megfontolása után a sejtésből az egyetlen, igazolásra váró probléma az maradt, hogy az $1.5 \leq \alpha \leq \pi/2$ értékekre nem létezik periodikus megoldás adott pozitív értéknél nagyobb abszolút értékű M és m szélsőértékekkel.

A megoldáshoz implementáltunk egy új párhuzamosított korlátozás és szétválasztás eljárást, mely alkalmas lesz a teljes sejtés bizonyítására.

Summary

An important question is while studying approximations of the solutions of differential equations, whether the given problem has a stable solution or chaotic behaviour. We study verified computational methods to check regions the points of which fulfill the conditions of some given behaviour.

In this case the verification means mathematical strong proof. In the computational part rounding and other errors were considered. Instead of real numbers, we can also calculate with intervals. In case the bounds of the result interval are not computer representable, then they are rounded outward.

Chaotic regions of the Hénon map

The problem is usually solved by careful studying the given problem with much human interaction, followed by an estimation of the Lipschitz constant, bounding the rounding errors to be committed, and finally a number of grid points are checked one by one by a proper computer program. The previous method, for example, was published in Zgliczynski's paper, where the chaotic behavior of the Hénon map

$$\mathcal{H}(x_1, x_2) = (1 - Ax_1^2 + x_2, Bx_1)$$

was investigated. Instead of human efforts, we introduce a new – interval arithmetic based – automatized method.

To check the existence of chaotic regions we have set up an adaptive subdivision algorithm based on interval arithmetic. First the algorithm determines the starting interval, that contains the region to be checked. Then the three inclusion relations are checked one after the other. All of these proved to be valid – as expected. The number of function evaluations (for the transformation, i.e. for the seventh iterate of the Hénon mapping in each case) were 273, 523, and 1613, respectively. The algorithm stores those subintervals for which it was impossible to prove directly whether the given condition holds, these required further subdivision to achieve a conclusion. The depth of the stack necessary for the checking was 11, 13, and 14, respectively. The CPU time used proved to be negligible, only a few seconds.

We have proven that this algorithm is capable to provide the positive answer after a finite number of steps, and also that the given answer is rigorous in the mathematical sense. Once we have a reliable computer procedure to check the conditions

of chaotic behavior of a mapping it is straightforward to set up an optimization model that transforms the original chaos location problem to a global optimization problem.

The key question for the successful application of a global optimization algorithm was how to compose the penalty function. On the basis of earlier experiences collected with similar constrained problems, we have decided to add a nonnegative value proportional to how much the given condition was hurt, plus a fixed penalty term in case at least one of the constraints was not satisfied.

We have applied the global optimization model for the 5th iterate Hénon mapping. Note that the less the iteration number, the more difficult the related problem: no chaotic regions were reported for the iterates less than 7 till now.

We applied successfully this method to locate several chaotic regions of Hénon map, and gave a lower bound for topological entropy.

Chaotic behaviour of the forced damped pendulum

Recently, a few papers considered real dynamical problems and give a mathematical proof to chaotic behaviour. In this part we investigated a forced damped pendulum as the mechanical model, i.e. we have a body on a weightless solid rod, forced to move on a vertical circle around the center point. We have a not negligible friction depending on the speed of the pendulum with a friction factor of $b = 0.1$. An external periodic force is applied to the body, $\cos t$, where t is the time (it is independent of all other factors).

The related second order differential equation is

$$x'' = \cos t - 0.1x' - \sin x,$$

where x is the angle of the pendulum, and x' is the angle speed of the pendulum.

In the proof we will need certain quadrilaterals $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ "long" in the unstable and "short" in the stable directions so that there are "*exceptional*" orbits of the Poincaré mapping P with the following properties:

1. an exceptional orbit is contained in $\cup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k$;
2. an exceptional orbit visits the quadrilaterals consecutively: if $P^n(x_0, x'_0) \in Q_k$ for some $k, n \in \mathbb{Z}$, then either $P^{n+1}(x_0, x'_0) \in Q_{k-1}$ or $P^{n+1}(x_0, x'_0) \in Q_k$ or $P^{n+1}(x_0, x'_0) \in Q_{k+1}$.

In the main step of the proof of chaotic behaviour we will show that for an arbitrary consecutive order $\{Q_{i_k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ of quadrilaterals there is an exceptional orbit visiting the quadrilaterals in the prescribed order. To this end we have to know forward images $P(Q_k)$.

We applied the earlier mentioned subdivision method, which was able to prove the chaotic behaviour of the considered systems.

Investigation of Wright conjecture

E.M. Wright considered the delay differential equation

$$z'(t) = -\alpha z(t-1)(1+z(t)),$$

where α is a positive number, and the initial function $\phi(s)$ is a constant, $c > -1$, i.e. $\phi(s) = c$ for $s \in [-1, 0]$.

To simplify the further calculations use the substitution $z(t) = e^{y(t)} - 1$. Then $z'(t) = e^{y(t)} y'(t)$ and $z(t-1) = e^{y(t-1)} - 1$. We obtain the delay differential equation

$$y'(t) = -\alpha(e^{y(t-1)} - 1),$$

where the initial function is $\phi(s) = c$, $s \in [-1, 0]$.

E.M. Wright conjectured published in 1955 that all solutions of this delay differential equation converge to zero for a wide set of the parameter α . He gave a proof of the statement for α values between 0 and 1.5, and conjectured to be true for further α values below $\pi/2$.

We proved the correctness of a new, even more stronger bounding scheme that allows an efficient shrinking of the possible extreme values of a periodic solution. The present approach follows another line of thought, still it is a kind of extension of that of Wright. We applied our Taylor series based algorithm to bound the trajectories too.

After the theoretical investigations the remaining problem to be solved is to prove that for α values between 1.5 and $\pi/2$ no periodic solution exists with M and m absolute extreme values larger than a certain positive number.

We implemented a new parallel branch-and-bound algorithm, which is able to prove the remaining problem, so—together with the theoretical part—we may be able to prove Wright original conjecture.

Irodalomjegyzék

- [1] G. Alefeld and J. Herzberger. *Introduction to Interval Computations*. Academic Press Inc. (New York), 1983.
- [2] G. Alefeld and G. Mayer. Interval Analysis: Theory and Applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 121:421–464, 2000.
- [3] K. Appel and W. Haken. Solution of the four color map problem. *Scientific American*, 237:108–121, 1977.
- [4] V.I. Arnold. *Közönséges differenciálegyenletek*. Műszaki Könyvkiadó (Budapest), 1978.
- [5] J. Balogh, T. Csendes, and R.P. Stateva. Application of a stochastic method to the solution of the phase stability problem: Cubic equations of state. *Fluid Phase Equilibria*, 212:257–267, 2003.
- [6] B. Bánhelyi. Egy késleltetett differenciálegyenlet vizsgálata megbízható számítógépes eljárással. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 24:131–150, 2007.
- [7] B. Bánhelyi and T. Csendes. A verified computational technique to locate chaotic regions of Hénon systems. In *Proceedings of the 6th International Conference on Applied Informatics (ICAI2004), Eger (Hungary)*, pages 297–304, 2004.
- [8] B. Bánhelyi and T. Csendes. A global optimization model for locating chaos: numerical results. In *Proceedings of the International Workshop on Global Optimization (GO05), Almería (Spain)*, pages 35–39, 2005.
- [9] B. Bánhelyi, T. Csendes, and B.M. Garay. Optimization and the Miranda approach in detecting horseshoe-type chaos by computer. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17, 2007. Közlésre elfogadva.
- [10] B. Bánhelyi, T. Csendes, and B.M. Garay. Σ_2 chaos for iterates of the classical Hénon mapping. Kézirat, 2007.
- [11] B. Bánhelyi, T. Csendes, and B.M. Garay. Rigorous lower bounds for the topological entropy via a verified optimization technique. In *Proceedings of the 12th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics (SCAN 2006), Duisburg (Germany)*. IEEE, 2007. Közlésre elfogadva.

- [12] B. Bánhelyi, T. Csendes, B.M. Garay, and L. Hatvani. A computer-assisted proof for Σ_3 -chaos in the forced damped pendulum equation. Kézirat, 2007.
- [13] B. Bánhelyi, T. Csendes, B.M. Garay, and L. Hatvani. Computer assisted proof of chaotic behaviour of the forced damped pendulum. In *Proceedings of the Colloquium on Differential and Difference Equations (CDDE2006), Brno (Czech Republic)*, Folia Facultatis Scientiarum Naturalium Universitatis Masarykianae Brunensis. Mathematica. Masaryk University, 2007. Közlésre elfogadva.
- [14] B. Bánhelyi, T. Csendes, T. Krisztin, and A. Neumaier. Proof for a conjecture of Wright on a delay differential equation II. – Computer Aided Part. Kézirat, 2007.
- [15] M. Berz, K. Makino, K. Shamseddine, G. Hoffstätter, and W. Wan. COSY INFINITY and its applications to nonlinear dynamics. In M. Berz, C. Bischof, G. Corliss, and A. Griewank, editors, *Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools*, pages 363–365. SIAM (Philadelphia), 1996. Proceedings of the SIAM Workshop on the Automatic Differentiation of Algorithms, Santa Fe (New Mexico, USA).
- [16] R. Borreli and C. Coleman. Computers, lies and the fishing season. *The College Mathematics Journal*, 25:401–412, 1994.
- [17] T. Csendes. Nonlinear parameter estimation by global optimization - efficiency and reliability. *Acta Cybernetica*, 8:361–370, 1988.
- [18] T. Csendes and B. Bánhelyi. A global optimization model for locating chaos. In *Proceedings of the International Workshop on Global Optimization (GO05), Almería (Spain)*, pages 81–85, 2005.
- [19] T. Csendes, B. Bánhelyi, and L. Hatvani. Towards a computer-assisted proof for chaos in a forced damped pendulum equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 199:378–383, 2007.
- [20] T. Csendes, B.M. Garay, and B. Bánhelyi. A verified optimization technique to locate chaotic regions of a Hénon system. *Journal of Global Optimization*, 35:145–160, 2006.
- [21] T. Csendes, Z.B. Zabinsky, and B.P. Kristinsdottir. Constructing large feasible suboptimal intervals for constrained nonlinear optimization. *Annals of Operations Research*, 58:279–293, 1995.
- [22] C-XSC Languages home page.
<http://www.xsc.de/>.
- [23] M. Dellnitz and O. Junge. Set oriented numerical methods for dynamical systems. In B. Fiedler, G. Iooss, and N. Kopell, editors, *Handbook of Dynamical Systems*, volume II, pages 221–264. North-Holland (Amsterdam), 2002.
- [24] R. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley (Redwood City), 1989.

- [25] V. Franceschini and L. Russo. Stable and unstable manifolds of the Hénon mapping. *Journal of Statistical Physics*, 25:757–769, 1981.
- [26] Z. Galias. Rigorous numerical studies of the existence of periodic orbits for the Hénon map. *Journal of Universal Computing Science*, 4:114–124, 1998.
- [27] Z. Galias. Obtaining rigorous bounds for topological entropy for discrete time dynamical systems. In *Proceedings of the International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2002), Xi'an (China)*, pages 619–622. PRC, 2002.
- [28] Z. Galias and P. Zgliczyński. Abundance of homoclinic and heteroclinic connections and rigorous bounds for the topological entropy of the Hénon map. *Nonlinearity*, 14:903–932, 2001.
- [29] M. Gidea and P. Zgliczyński. Covering relations for multidimensional dynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 202:32–58, 2004.
- [30] P. Grassberger and I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica*, 9:189–208, 1983.
- [31] T.C. Hales. Cannonballs and honeycombs. *Notices of the American Mathematical Society*, 47:440–449, 2000.
- [32] E. Hansen. *Global Optimization Using Interval Analysis*. Marcel Dekker (New York), 1992.
- [33] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50:69–77, 1976.
- [34] J. Hubbard. The forced damped pendulum: Chaos, complication and control. *American Mathematical Monthly*, 106:741–758, 1999.
- [35] J. Hubbard and B. West. *ODE Architect Companion, Lab book*, chapter Chaos and Control, pages 221–232. John Wiley & Sons (New York), 1999.
- [36] R.B. Kearfott. *Rigorous Global Search: Continuous Problems*. Kluwer (Dordrecht), 1996.
- [37] R. Klatte, U. Kulisch, C. Lawo, M. Rauch, and A. Wiethoff. *C-XSC: A C++ Class Library for Extended Scientific Computing*. Springer-Verlag (Berlin), 1993.
- [38] O. Knüpel. A multiple precision arithmetic for PROFIL. Technical report, Berichte des Forschungsschwerpunktes Informations- und Kommunikationstechnik, 1993.
- [39] O. Knüpel. PROFIL – programmers runtime optimized fast interval library. Technical report, Berichte des Forschungsschwerpunktes Informations- und Kommunikationstechnik, 1993.

- [40] B.P. Kristinsdottir, Z.B. Zabinsky, T. Csendes, and M.E. Tuttle. Methodologies for tolerance intervals. *Interval Computations*, 3:133–147, 1993.
- [41] B.P. Kristinsdottir, Z.B. Zabinsky, M.E. Tuttle, and T. Csendes. Incorporating manufacturing tolerances in optimal design of composite structures. *Engineering Optimization*, 26:1–23, 1996.
- [42] T. Krisztin. Periodic orbits and the global attractor for delayed monotone negative feedback. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 15:1–12, 2000.
- [43] T. Krisztin and G. Röst. Proof for a conjecture of Wright on a delay differential equation I. - Theoretical Part. Kézirat, 2007.
- [44] T. Krisztin, H.O. Walther, and J. Wu. The structure of an attracting set defined by delayed and monotone positive feedback. *CWI Quarterly*, 12:315–327, 1999.
- [45] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141, 1963.
- [46] E.N. Lorenz. "Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?". Lecture at 139th meeting of the AAAS, 1972.
- [47] E.N. Lorenz. *The Essence of Chaos*. UCL Press (London), 1993.
- [48] M.C. Markót and T. Csendes. A new verified optimization technique for the "Packing Circles in a Unit Square" problems. *SIAM Journal on Optimization*, 16:193–219, 2005.
- [49] J. Mawhin. Periodic oscillations of forced pendulum-like equations. *Ordinary and Partial Differential Equations*, 964:458–476, 1982.
- [50] K. Mischaikow and M. Mrozek. Chaos in the Lorenz equations: a computer-assisted proof. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 32:66–72, 1995.
- [51] R.E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall (Englewood Cliffs), 1966.
- [52] N.S. Nedialkov, K.R. Jackson, and G.F. Corliss. Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 105:21–68, 1999.
- [53] A. Neumaier and T. Rage. Rigorous chaos verification in discrete dynamical systems. *Physica*, 67:327–346, 1993.
- [54] S. Newhouse. Entropy and volume. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 8:283–299, 1988.
- [55] D. Papini and F. Zanolin. Fixed points, periodic points, and coin-tossing sequences for mappings defined on two-dimensional cells. *Fixed Point Theory and Applications*, 2004(2):113–134, 2004.

- [56] M. Pireddu and F. Zanolin. Fixed points for dissipative–repulsive systems and topological dynamics of mappings defined on n –dimensional cells. *Advanced Nonlinear Studies*, 5:411–440, 2005.
- [57] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Gauthier-Villars (Paris), 1899. English translation 'New Methods of Celestial Mechanics' by D. Goroff, AIP Press (New York), 1992.
- [58] PROFIL/BIAS Languages home page.
<http://www.ti3.tu-harburg.de/Software/PROFIL.html>.
- [59] T. Rage, A. Neumaier, and C. Schlier. Rigorous verification of chaos in a molecular model. *Physical Review E*, 50:2682–2688, 1994.
- [60] H. Ratschek and J. Rokne. *Computer Methods for the Range of Functions*. Ellis Horwood (Chichester), 1984.
- [61] H. Ratschek and J. Rokne. *New Computer Methods for Global Optimization*. Ellis Horwood (Chichester), 1988.
- [62] C. Robinson. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. RCR Press (Boca Raton), 1999.
- [63] D.A. Russel, J.D. Hanson, and E. Ott. Dimension of strange attractors. *Physical Review Letters*, 45:1175, 1980.
- [64] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73:473–487, 1967.
- [65] A. Szymczak. A combinatorial procedure for finding isolated neighbourhoods and index pairs. *Proceedings of The Royal Society of Edinburgh (Mathematics)*, 127:1075–1088, 1997.
- [66] W. Tucker. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, 328:1197–1202, 1999.
- [67] VNODE Package home page.
<http://www.cas.mcmaster.ca/~nedialk/Software/VNODE/VNODE.shtml>.
- [68] H.G. Wells. *The Time Machine*. William Heinemann (London), 1895.
- [69] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag (Berlin), 2003.
- [70] Chaos theory from Wikipedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory.
- [71] K. Wójcik and P. Zgliczyński. Isolated segments, fixed point index, and symbolic dynamics. *Journal of Differential Equations*, 161:245–288, 2000.
- [72] E.M. Wright. A non-linear difference-differential equation. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 194:66–87, 1955.

- [73] P. Zgliczyński. Fixed point index for iterations of maps, topological horseshoe and chaos. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 8:169–177, 1996.
- [74] P. Zgliczyński. Computer assisted proof of chaos in the Rössler equations and in the Hénon map. *Nonlinearity*, 10:243–252, 1997.
- [75] P. Zgliczyński. Computer assisted proof of the horseshoe dynamics in the Hénon map. *Random and Computational Dynamics*, 5:1–17, 1997.
- [76] P. Zgliczyński. Multidimensional perturbations of one-dimensional maps and stability of Sharkovski ordering. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9:1867–1876, 1999.